Alan Teorisi

Yük dağılımları ve Dirac distribüsyonu

Orijinal not: Ders9.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

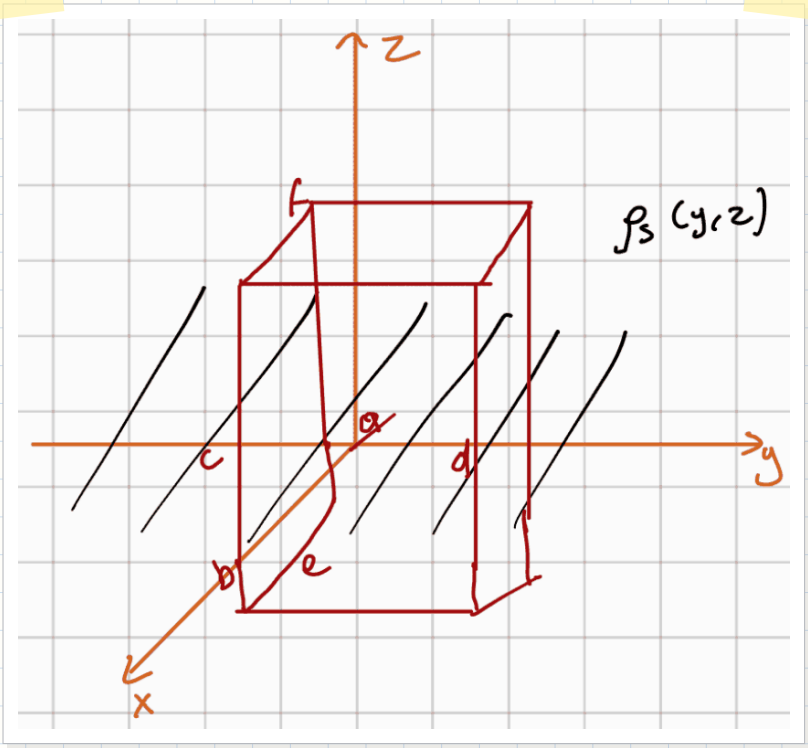
NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

Ders 9

Değişik Türden yük dağılımları ve Dirac Distribüsyonu

hacimsel	yüzeysel	çizgisel
ρ_v [C/m^3]	ρ_s [C/m^2]	ρ_c $\left[\frac{C}{m}\right]$



orijinal çizim, s. 1

$x = 0$'da $\rho_s(y,z)$ $\left[\frac{C}{m^2}\right]$ yük yoğunluğu olsun, bu yüzeysel yük yoğunluğuna ilişkin hacimsel yük yoğunluğu

$$\underset{[C/m^3]}{\rho_v(x,y,z)} = \underset{[C/m^2]}{\rho_s(y,z)}\ \underset{[1/m]}{\delta(x)}$$

$\delta(x)$'in özellikleri ♡

1) $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, $e \le z \le f$ prizması içindeki toplam yük $(\rho_V(x,y,z) = \rho_S(y,z)\,\delta(x))$

$$Q = \int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d}\int_{z=e}^{f} \rho_V(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{x=a\ y=c\ z=e}^{b\ d\ f} \rho_S(y,z)\,\delta(x)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{x=a}^{b} \delta(x)\,dx \int_{y=c}^{d}\int_{z=e}^{f} \rho_S(y,z)\,dy\,dz \Rightarrow \begin{array}{l} a,b<0,\ Q=0 \\ a,b>0,\ Q=0 \\ a<0<b,\ Q=\int_{y=c}^{d}\int_{z=e}^{f}\rho_S(y,z)\,dy\,dz \end{array}$$

$$\int_{x=a}^{b}\delta(x)\,dx = \begin{cases} 0, & ab>0 \\ 1, & a<x<b \end{cases}$$

2) $\rho_V(x,y,z) = f(x)\,\rho_S(y,z)\,\delta(x)$ olsun
$f(0) = 0$ olursa
$\delta(x)$ nedeniyle $x \neq 0$ $\rho_V = 0$

orj. s. 2

$f(x)$ nedeniyle $x = 0$ $\rho_V = 0$
$f(x)\,\delta(x) = 0$ ve $f(0) = 0$
$f(x) = g(x) - g(0)$ olsun
$[g(x) - g(0)]\,\delta(x) = 0$

$$g(x)\,\delta(x) = g(0)\,\delta(x)$$

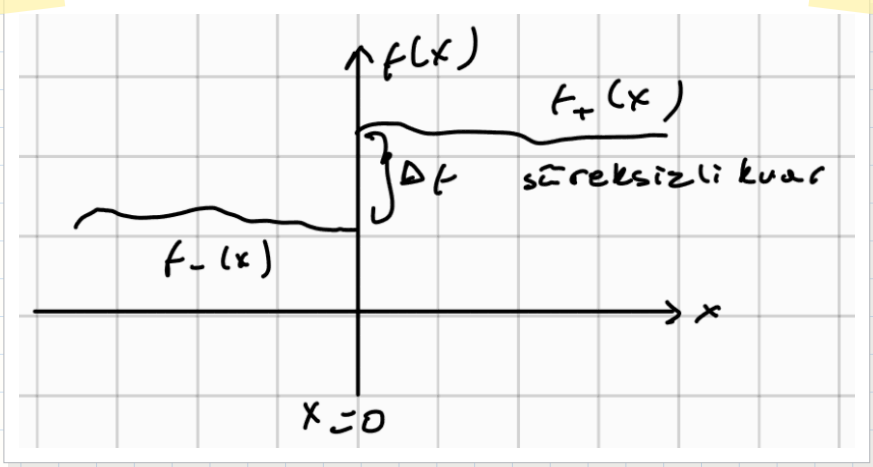
3) $$\int_{a}^{b}\delta(x)\,dx = \begin{cases} 0, & ab>0 \\ 1, & a<x<b \end{cases}$$

$a \to -\infty$, $b \to x$

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(x)\,dx = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases} = \upsilon(x) \quad \text{birim basamak fonksiyonu}$$

$$\delta(x) = \frac{\partial \upsilon(x)}{\partial x}$$

4)



orijinal çizim, s. 2

$$f(x) = \begin{cases} f_-(x), & x < 0 \\ f_+(x), & x > 0 \end{cases}$$

$x = 0$'da süreksizlik var

$$f(x) = f_+(x)\,u(x) + f_-(x)\,u(-x)$$

$$f'(x) = f'_+(x)\,u(x) + \underbrace{f_+(x)\,\delta(x)}_{f_+(0)\,\delta(x)} + f'(x)\,u(-x)^{1} + f'_-(x)\,u(-x)$$

$$- \underbrace{f_-(x)\,\delta(x)}_{f_-(0)\,\delta(x)}$$

orj. s. 3

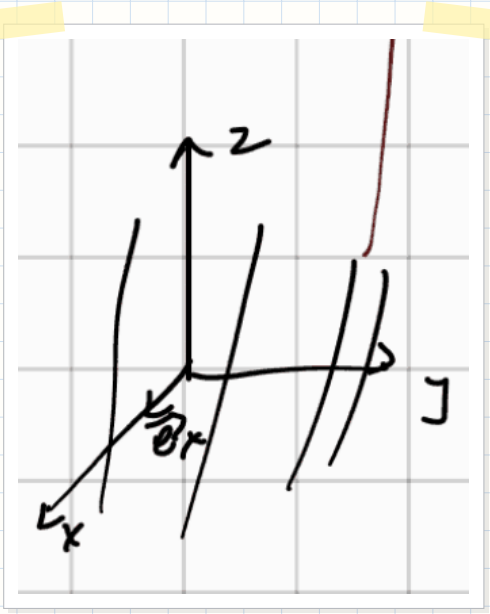
$$f'(x) = \underbrace{\left[f'_-(x)\,u(-x) + f'_+(x)\,u(x)\right]}_{\{f'(x)\}} + \underbrace{\left[f_+(0) - f_-(0)\right]\delta(x)}_{[|f|]\,\delta(x)}$$

$$f'(x) = \underbrace{\{f'(x)\}}_{\text{Regüler kısım}} + \underbrace{[|f|]\,\delta(x)}_{\text{Tekil (singüler kısım)}}$$

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z \Big|,$$

$x = 0$'da bir süreksizlik olsun

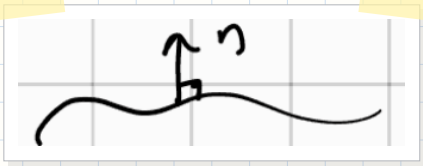
[1] El yazısında satırın ortasındaki bu terim büyük bir çarpı ile çizilerek iptal edilmiş.



orijinal çizim, s. 3

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left\{\frac{\partial V}{\partial x}\right\} + [|V|]\,\delta(x) \quad + [|V\vec{e}_x|]\,\delta(x)$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \left\{\frac{\partial V}{\partial y}\right\}$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = \left\{\frac{\partial V}{\partial z}\right\}$$

V'nin süreksizliği herhangi bir S yüzeyi üzerinde olsaydı,



orijinal çizim, s. 3

$$\text{grad}\, V = \{\text{grad}\, V\} + [|V\hat{n}|]\,\delta(s)$$

S) $x = 0$'da süreksizliği olan $\vec{E}(x, y, z)$ için

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \left\{\frac{\partial E_x}{\partial x}\right\} + [|E_x|]\,\delta(x)$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \left\{\frac{\partial E_y}{\partial y}\right\}$$

orj. s. 4

$$+ \frac{\partial E_z}{\partial z} = \left\{\frac{\partial E_z}{\partial z}\right\}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \{\operatorname{div}\vec{E}\} + [|E_x|]\,\delta(x)$$

$$= \{\operatorname{div}\vec{E}\} + [|\vec{E}\cdot\vec{e}_x|]\,\delta(x)$$

Genel durumda bir s yüzeyinde süreksizlik varsa

$$\operatorname{div}\vec{E} = \{\operatorname{div}\vec{E}\} + [|\hat{n}\cdot\vec{E}|]\,\delta(s)$$

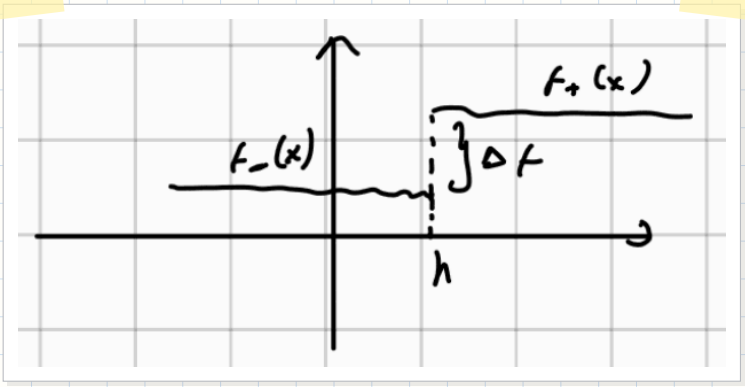
$$\operatorname{rot}\vec{E} = \{\operatorname{rot}\vec{E}\} + [|\hat{n}\times\vec{E}|]\,\delta(s)$$

6) Süreksizlik $x = 0$ yerine $x = h$'da olursa
$\delta(x) \to \delta(x-h)$

$$\int_a^b \delta(x-h)\,dx = \begin{cases} 1, & a < h < b \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$f(x)\,\delta(x-h) = f(h)\,\delta(x-h)$$

$$\frac{\partial u(x-h)}{\partial x} = \delta(x-h)$$



orijinal çizim, s. 4

$$f'(x) = \{f'(x)\} + \Big[\underbrace{|f(h+0) - f(h-0)|}_{\Delta f}\Big]\,\delta(x-h)$$

7) Bir C eğrisi S_1 ve S_2 yüzeylerin ara kesiti olsun. C üzerinde bulunan ρ_c [C/m] için hacimsel yük yoğunluğu

$$\rho_v(x,y,z) = \rho_c\,\delta(S_1)\,\delta(S_2)$$

$S_1 : x = a$
$S_2 : y = b$

$$\underbrace{\delta(x-a)}_{S_1}\,\underbrace{\delta(y-b)}_{S_2}$$

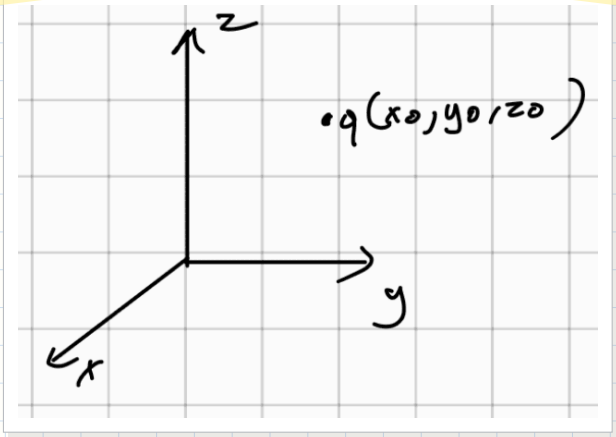
orj. s. 5

Örneğin z eksenine yerleştirilmiş çizgisel

$$\rho_v(x,y,z) = \rho_c\,\delta(x)\,\delta(y)$$

8) (x_0, y_0, z_0) noktasında bulunan q noktasal yük için hacimsel yük yoğunluğu

$$\rho_v = q\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$$

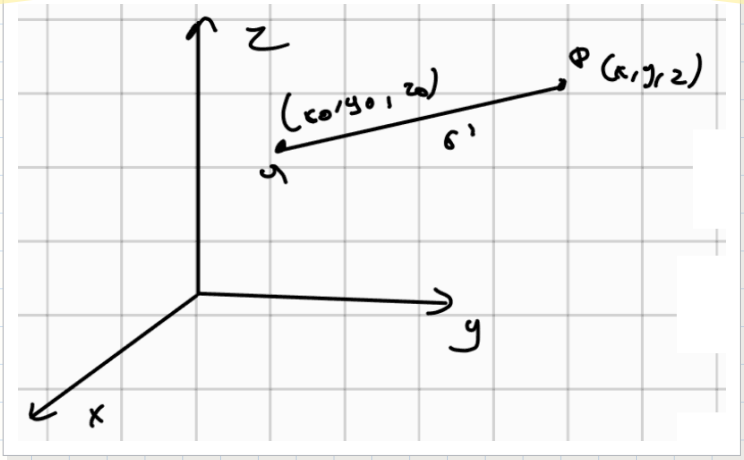


orijinal çizim, s. 5

Örnek 1

$\Delta\left(\frac{1}{r'}\right) = -4\pi\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$ olduğunu gösteriniz

$$r' = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$



orijinal çizim, s. 5

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'}$$

$\Delta V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$ Poisson hacim içinde yük varsa

$\Delta V = 0$ Laplace denklemi hacimde yük yoksa

$$\rho_v = q\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$$

$$\Delta\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'}\right) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$$

$$\frac{1}{4\pi}\Delta\left(\frac{1}{r'}\right) = -\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$$

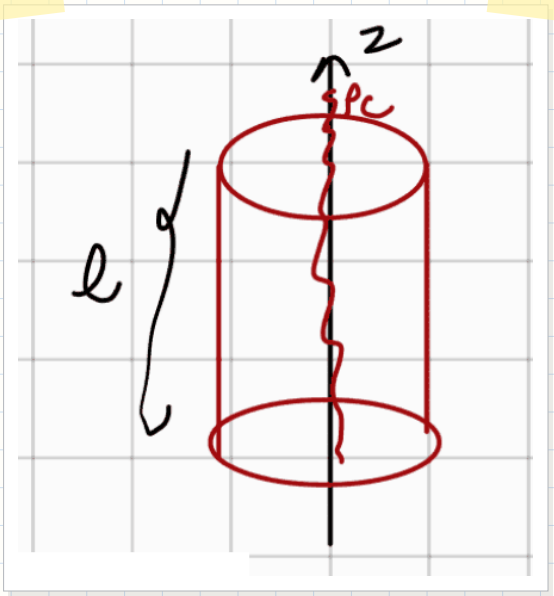
orj. s. 6

$$\Delta\left(\frac{1}{r'}\right) = -4\pi\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$$

silindirik koordinatlardaki uzunluk ↓

$\rho^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$ olmak üzere

$$\Delta\left(\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = -2\pi\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)$$



orijinal çizim, s. 6

$Q = \ell \cdot \rho_c$ (ℓ uzunluğu boyunca)

$$\oint_S \varepsilon_0\,\vec{E}\cdot d\vec{s} = \ell\rho_c \qquad \vec{E} = E_\rho(\rho)\,\vec{e}_\rho \qquad d\vec{s} = \rho\,d\phi\,dz\,\vec{e}_\rho$$

$$\int_{z=0}^{\ell}\int_{\phi=0}^{2\pi} \varepsilon_0\,E_\rho(\rho)\,\rho\,d\phi\,dz = \ell\rho_c$$

$$2\pi\ell\varepsilon_0\,\rho\,E_\rho(\rho) = \ell\rho_c$$

$$E_\rho(\rho) = \frac{\rho_c}{2\pi\varepsilon_0\rho} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_c}{2\pi\varepsilon_0\rho}\,\vec{e}_\rho$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V \Rightarrow \frac{\rho_c}{2\pi\varepsilon_0\rho} = -\frac{\partial V}{\partial\rho}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho_c}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{\rho}\right) + V_0$$

$$\Delta V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \quad \text{ve} \quad \rho_v = \rho_c\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)$$

$$\Delta\left(\frac{\rho_c}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{\rho}\right) + V_0\right) = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)$$

$$\frac{\rho_c}{2\pi\varepsilon_0}\,\Delta\left(\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta\left(\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = -2\pi\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)$$