Alan Teorisi

Uygulama 3 – Laplace denklemi ve sınır değer problemleri

Orijinal not: Uygulama3.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(x,y,z)}{R'}\,dx\,dy\,dz$$

$$\vec{E}(x,y,z) = -\operatorname{grad} V(x,y,z)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\operatorname{rot}\operatorname{grad} V$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}\vec{E} = 0 \qquad \text{(Elektrostatikte)}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} V = \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

silindirik:

$$\Delta V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

küresel:

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 V_1}{\partial \phi^2}$$

içerde yük yoksa $\rho = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$ (laplacian) Laplacian denklemi

Sayfa 26 – Pr.4

Şekil: Basılı soru metni: "Pr.4. $z = 0$ ve $z = d$ düzlemleri, sırasıyla, $V = 0$ ve $V = V_0$ potansiyellerine sahiptirler ve bu düzlemler arasındaki bölgede yük yoktur. Bu bölgede $V = \frac{V_0}{d}z$, $\mathbf{E} = -\frac{V_0}{d}\mathbf{e}_z$ olduğunu gösteriniz." Altında el çizimi: z ekseni yukarı, y sağa, x sol alta doğru; üstte yatay çizgi $z = d$ (sağ ucunda $V = V_0$), altta yatay çizgi $z = 0$ (sağ ucunda $V = 0$); aradaki bölge eğik çizgilerle taranmış ve içinde $\rho = 0$ yazılı.
(orijinal notta, s. 1)

Ara bölgede V ve $\vec{E}$ ifadeleri nedir

[1] Claude notu: muhtemelen $r^2\sin^2\theta$ olmalı.

$$\Delta V = 0$$

$$\Delta V = \overbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}}^{0} + \overbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}^{0} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{(değişim yok)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \overset{\text{integral}}{\Longrightarrow} \frac{\partial V}{\partial z} = A \Rightarrow V(z) = Az + B$$

orj. s. 2

$$z = 0 \Rightarrow V(0) = 0$$
$$z = d \Rightarrow V(d) = V_0$$

$$V(0) = B = 0$$

$$V(d) = Ad = V_0$$

$$A = \frac{V_0}{d}$$

$$\Rightarrow V(z) = \frac{V_0}{d} z$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V = -\overbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}^{0} \vec{e}_x - \overbrace{\frac{\partial V}{\partial y}}^{0} \vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V_0}{d} z\right)\vec{e}_z = -\frac{V_0}{d}\vec{e}_z$$

S26.Pr5

> *Şekil:* Basılı soru metni: "Pr.-5. Aynı eksenli, a ve b yarıçaplı, sonsuz uzun iki silindir arasındaki bölgede kaynak yoktur ve bu silindirler üzerinde potansiyel sabit V_a ve V_b değerlerine sahiptir. Potansiyel fonksiyonun açık ifadesini yazınız. Alan şiddetinin bir iletkenden diğerine nasıl değiştiğini gösteren eğriyi çiziniz." Basılı şekil: iç içe iki eş eksenli silindirin kesiti (gri halka), iç yarıçap a (V_a), dış yarıçap b (V_b); ρ, ϕ ve sağa doğru z ekseni gösterilmiş. El yazısıyla eklenenler: halkanın üstünde "ρ = 0", sağında "a ≤ ρ ≤ b" ve "V(ρ)".
> *(orijinal notta, s. 2)*

Silindirik koordinatlar
ρ, ϕ, z → z'de sonsuza gider
↓ ?açıya bağımlı değil, simetriktir z'ye bağımlı değil

ρ = 0 iken ΔV = 0

?genel ←

$$\Delta V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\overbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}}^{0} + \overbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}^{0} = 0$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} = A \Rightarrow \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} = \frac{A}{\rho}$$

$$V(\rho) = A \ln \rho + B$$

orj. s. 3

$\rho = a$ iken $V(a) = V_a$

$\rho = b$ iken $V(b) = V_b$

$$\rho = a \Rightarrow A \ln a + B = V_a$$

$$\rho = b \Rightarrow -A \ln b - B = -V_b$$

$$A(\ln a - \ln b) = V_a - V_b$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{V_a - V_b}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}}$$

B'yi bulalım

$$A \ln a + B = V_a$$

$$\frac{V_a - V_b}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot \ln a + B = V_a \Rightarrow B = V_a - \ln a \frac{V_a - V_b}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$B = -\frac{V_a \ln b - V_b \ln a}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$\boxed{V(\rho) = \frac{V_a - V_b}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \ln \rho - \frac{V_a \ln b - V_b \ln a}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}}$$

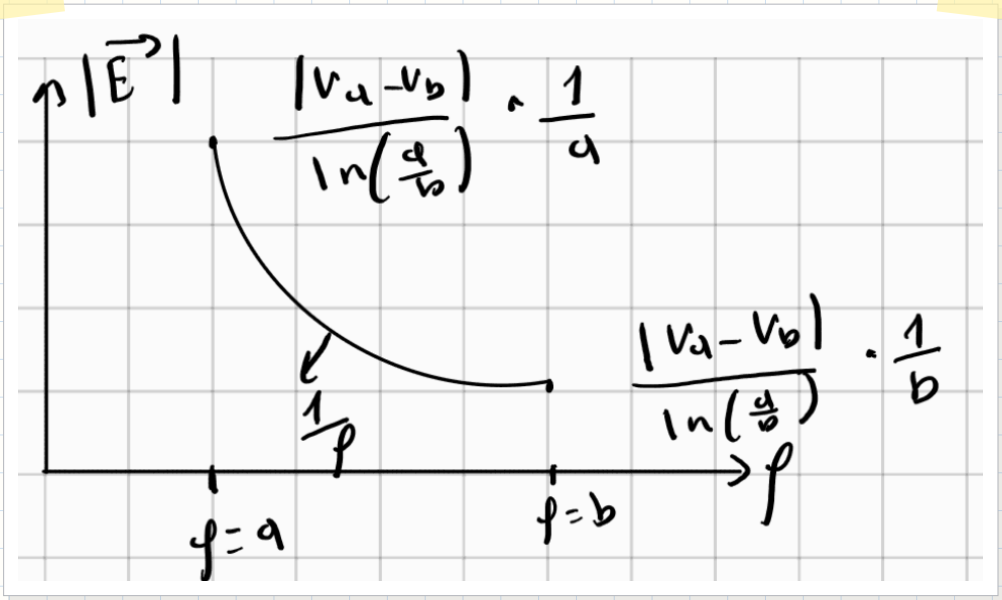
$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V = -\frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} \vec{e}_\rho$$

$$\vec{E}(\rho) = -\frac{1}{\rho} \frac{V_a - V_b}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \vec{e}_\rho$$

kartezyen $\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$

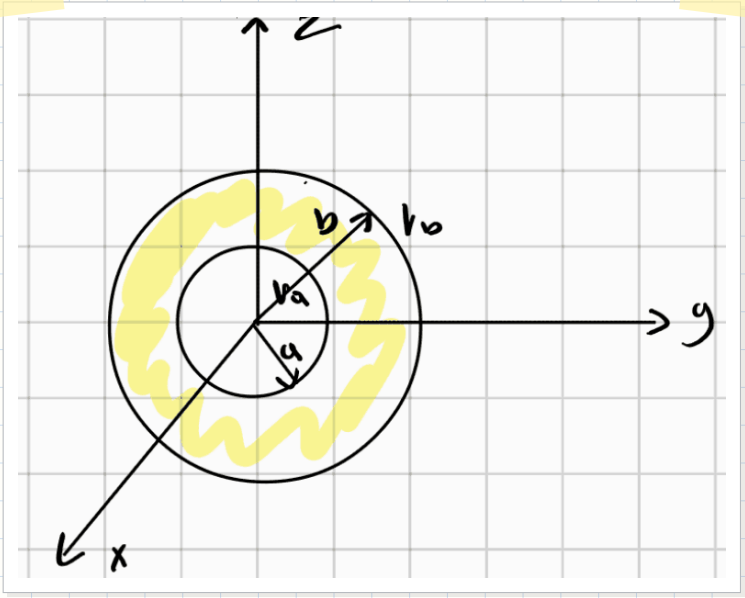
Silindirik $\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \cdots$

orj. s. 4



orijinal çizim, s. 4

S26.Pr6 iç içe küre



orijinal çizim, s. 4

Ara bölgede $a \le r \le b$ V, $\vec{E}$ ifadeleri

$$\Delta V = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = 0$$

r, ϕ, θ: sadece r'ye bağlı

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \qquad (1/r^2 \text{ çizilmiş})$$

$$\Rightarrow r^2\frac{\partial V}{\partial r} = -A \quad \text{olsun}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-A}{r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{A}{r} + B$$

$$r = a,\ V(a) = V_a \quad \Rightarrow \quad V_a = \frac{A}{a} + B$$

$$r = b,\ V(b) = V_b \quad \Rightarrow \quad -V_b = -\frac{A}{b} - B$$

$$V_a - V_b = A\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$A = \frac{V_a - V_b}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

orj. s. 5

$$V_a = \frac{A}{a} + B \Rightarrow V_a = \frac{1}{a}\frac{V_a - V_b}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} + B$$

$$B = V_a - \frac{1}{a}\frac{V_a - V_b}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$= V_a - \frac{ab}{a}\frac{V_a - V_b}{b - a}$$

$$B = \frac{V_a(b-a) - b(V_a - V_b)}{b - a}$$

$$B = \frac{bV_b - aV_a}{b - a} = \frac{aV_a - bV_b}{a - b}$$

$$V(r) = \frac{V_a - V_b}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}\frac{1}{r} + \frac{aV_a - bV_b}{a - b}$$

$$\vec{E}(r) = -\operatorname{grad} V = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\vec{e}_r$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_a - V_b}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}\frac{1}{r}\right)\vec{e}_r$$

$$= \frac{V_a - V_b}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$$

S.26 Pr9

Şekil: Basılı soru metni: "Pr.-9. Bir elektrostatik alanda $\mathbf{E} = A\frac{\cos\theta}{r^3}\mathbf{e}_r + B\frac{\sin\theta}{r^3}\mathbf{e}_\theta$ olduğu gözlenmiştir (A, B = sabit). a) A ile B arasındaki ilişkiyi bulunuz. b) Potansiyel fonksiyonunu belirleyiniz." *(orijinal notta, s. 5)*

a) $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$

$$\vec{E} = E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta + E_\phi\vec{e}_\phi$$

$$\Rightarrow\ E_\phi = 0,\quad E_r = \frac{A\cos\theta}{r^3},\quad E_\theta = B\frac{\sin\theta}{r^3}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\overbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,E_\phi)}^{0} - \overbrace{\frac{\partial E_\theta}{\partial\phi}}^{0}\right]\vec{e}_r$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\overbrace{\frac{\partial E_r}{\partial\phi}}^{0} - \overbrace{\frac{\partial}{\partial r}(rE_\phi)}^{0}\right]\vec{e}_\theta$$

orj. s. 6

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right]\vec{e}_\phi = 0$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right]\vec{e}_\phi = 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) = \frac{\partial E_r}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rB\frac{\sin\theta}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(A\frac{\cos\theta}{r^3}\right)$$

$$-2B\frac{\sin\theta}{r^3} = -A\frac{\sin\theta}{r^3}$$

$$\boxed{A = 2B}$$

b) $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$

$$= -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{e}_\theta - \underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}}_{0}\vec{e}_\phi$$

$$E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$$

$\boxed{E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r}}$ (bunu seçerim), $\quad E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\qquad V(r,\theta)$

$$V = -\int E_r\,dr + \underbrace{f(\theta)}_{\text{thetaya bağımlılık için}}$$

$$= -\int\frac{A}{r^3}\cos\theta\,dr + f(\theta)$$

$$= \frac{A}{2r^2}\cos\theta + f(\theta) = V$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\ \Rightarrow\ B\frac{\sin\theta}{r^3} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{A}{2r^2}\cos\theta + f(\theta)\right)$$

orj. s. 7

$$\Rightarrow\ \frac{B\sin\theta}{r^2} = +\frac{A}{2r^2}\sin\theta - \frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta}$$

Önceden $A = 2B$ olduğunu biliyorduk

$$\frac{A\sin\theta}{2r^2} = \frac{A}{2r^2}\sin\theta - \frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow f(\theta) = C$$

$$V = \frac{A}{2r^2}\cos\theta + f(\theta) = \frac{A}{2r^2}\cos\theta + C$$

$$\vec{r} \to \infty \Rightarrow \vec{E} \to 0 \Rightarrow \vec{V} \to 0$$

$$\lim_{r\to\infty} V = 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$