Diferansiyel Denklemler

4.–6. Hafta – Fizik problemleri, varlık-teklik, Picard, Wronskiyen, sabit katsayılı denklemler

Orijinal not: dif-notu-part2-4-6-hafta.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

Mekanik ve fizik problemlerinin Diferansiyel Denklemlere dönüştürülerek çözülmesi

$$t \text{ anındaki değişim} = y'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

(1) Newtonun ikinci kuralı:

$$F = m \cdot a \qquad a = \frac{dV}{dt} \qquad V = \frac{dx}{dt}$$

(2) Oran problemleri (Radyoaktif parçalanma ve popülasyon)

t yıl sonra radyoaktif madde miktarı $x = x(t)$ olursa, onun parçalanma hızı $\frac{dx(t)}{dt}$ dir.

Parçalanma hızı, radyoaktif maddenin miktarı ile doğru orantılıdır yani:

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad k > 0 \qquad x(0) = x_0 \text{ ile çözülür}$$

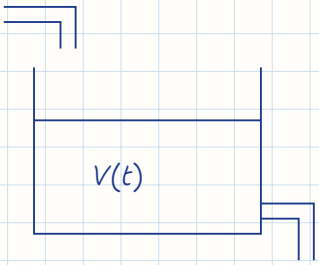
($x \to$ [parçalanmadan kalan madde miktarı])

Popülasyon artımı için

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad k > 0 \qquad x(0) = x_0$$

orj. s. 2

(3) Karışım problemleri



$V(t)$ t anındaki karışımın hacmi
$x(t)$ t anındaki tanktaki tuzun kütlesi
$C(t)$ konsantrasyon oranı $c(t) = \dfrac{x(t)}{V(t)}$

$$\frac{dx}{dt} = \text{rate in} - \text{rate out}$$

Çözüm adımları

1. birim zamanda giren tuzun miktarını hesaplarız
2. herhangi bir anda kaptaki karışımın hacmini buluruz
3. tuzun miktarını 2. de bulduğumuz hacime bölerek litre başına düşen tuzu buluruz
4. hızla çarparak çıkan tuzu hesapla?rız

orj. s. 3

5. sonra denklemi kurarız

$$\frac{dx}{dt} = \text{giren} - \text{çıkan}$$

6. başlangıç koşulu x_0 belirlenir ve denklem çözülür

Soğuma Problemleri

T = cismin sıcaklığı

T_e = onu çevreleyen ortamın sıcaklığı

Cismin sıcaklığının zamanla değişimin hızı

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_e) \qquad k > 0$$

orj. s. 4

Varlık ve teklik

Tanım

$D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde verilmiş $f(x, y)$ fonksiyonu (x, y_1) ve $(x, y_2) \in D$ için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $L > 0$ sabiti bulunursa, $f(x, y)$ y değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlar. (tek)

Teorem

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le L, \quad \forall (x,y) \in D \quad \text{sağlansın}$$

O halde $f(x,y)$ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar.

Teorem (Varlık ve teklik teoremi)

$f(x,y)$ D bandından sürekli ise → çözüm var
$f(x,y)$ D " y'ye göre lipschitz koşulunu sağlarsa → tek

orj. s. 5

Picard yaklaşımı

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(a) &= \alpha \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} y_0(x) &= \alpha \\ y_n(x) &= \alpha + \int_a^x f(s, y_{n-1}(s))\, ds \end{aligned}$$

n. Picard yaklaşımının hata payı şu şekilde hesaplanır

$$|y - y_n(x)| \le M \cdot L^n \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

M: $f(x,y)$ için üst sınır

L: Lipschitz sabiti

h: aralığın boyu

orj. s. 6

Wronskiyen nedir

$$f(x),\ g(x) \longrightarrow W = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

$W = 0 \rightarrow f(x)$ ile $g(x)$ lineer bağımlı
$W \neq 0 \rightarrow f(x)$ " " " bağımsız

Abel's teoremi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad \text{2. dereceden homojen denklem}$$

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$\text{Abel's teoremi} \rightarrow W(y_1, y_2) = c \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$$

orj. s. 7

2. derece sabit katsayılı homojen çözümündeki kurallar

★ $y(x) = e^{kx} \Rightarrow y'(x) = k\,e^{kx} \Rightarrow y''(x) = k^2 e^{kx}$

Karakteristik denklem oluşturma

$y'' + 2y' - 8y = 0$'nın karakteristik denklemi

$$k^2 + 2k - 8 = 0$$

r_1 ve r_2 denklemin kökleri olmak üzere

1) $\Delta > 0$ $r_1 \neq r_2$ reel $y_H = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
2) $\Delta = 0$ $r_1 = r_2$ reel $y_H = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_2 x}$
3) $\Delta < 0$ $r_1 = a + bi$ $y_H = c_1 e^{ax} \cdot \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx)$

bu kurallar genişletilerek yüksek mertebeli homojen dif denklemlerde kullanılır