Diferansiyel Denklemler

1.–3. Hafta – Birinci mertebeden diferansiyel denklemler

Orijinal not: diferansiyel-denklemler-not-part1-ilk-uc-hafta.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

2- Ayrılabilir denklemler

$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ şeklinde veya

$$M_1(x)\,M_2(y)\,dx + N_2(y)\,N_1(x)\,dy = 0$$

şeklindeki denklemler

Eğer $M_2(y) \cdot N_1(x) \neq 0$ ise

$$\frac{M_1(x)\,M_2(y)\,dx}{M_2(y)\,N_1(x)} + \frac{N_2(y)\,N_1(x)\,dy}{M_2(y)\,N_1(x)} = 0$$

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = c, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$M_2(y) = 0$, $N_1(x) = 0$ olduğu durumlar ayrıca kontrol edilmeli

orj. s. 2

3- Ayrılabilen denkleme indirgenebilen denklemler

$y' = f(ax + by + c)$ denklemi
$ax + by + c = z$, $z(x)$
dönüşümüyle $z' = a + b\,y' \Rightarrow$

$$y' = \frac{z' - a}{b} \quad \text{olduğuna göre}$$

$$z' = a + b\,f(z) \quad \text{şeklinde}$$

dönüşümünde bir ayrılabilir denklemdir.

Aşağıdaki dönüşümler lazım olabilir

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} \quad \text{dır}$$

orj. s. 3

4- Homojen denklemler

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ şeklindeki denklemlere homojen denklem denir. bu denklem $\frac{y}{x} = u$, $u(x) = u$, dönüşümü ile ayrılabilir denkleme dönüştürülür.

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu \longrightarrow y' = u + x\cdot u'$$

yerine yazarsak $u + xu' = f(u)$

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u$$
$$f(u) - u \neq 0 \longrightarrow \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

ve bu eşitliği integrallersek çözümünü elde ederiz.

orj. s. 4

Lineer Denklemler

$$y' + a(x)y = b(x)$$

denklemi 1. mertebeden lineer dif denklemi olarak adlandırılır

$$I(x) = e^{\int a(x)\,dx} \rightarrow \text{integrasyon}$$

çarpanı ile çarparak denklem çözülür

soldaki ifade $(y\cdot I(x))'$ olur

Bernoulli Denklemi

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \qquad n \neq 0,1 \quad n \in \mathbb{R}$$

1. adım ifadeyi y^{-n} ile çarpmak

$$y^{-n}y' + a(x)y^{1-n} = b(x)$$

2. adım $z = y^{1-n}$ dönüşümünü yapmak

$$z' = (1-n)y^{-n}\cdot y' \Rightarrow y^{-n}\cdot y' = \frac{z'}{1-n}$$

Claude ile dijitalleştirildi · hata içerebilir / Digitised with Claude · may contain errors

$$\Rightarrow \frac{z'}{1-n} + a(x)\,z = b\,x \qquad 1$$
$$\Rightarrow z' + \underbrace{(1-n)\,a(x)}_{A(x)}\,z = \underbrace{(1-n)\,b(x)}_{B(x)}$$

Bu lineer bir denklemdir

orj. s. 5

Riccati Denklemi

$$y' + a(x)\,y + b(x)\,y^2 = c(x)$$

Bu denklemin bir özel çözümü $y_1(x)$ biliniyorsa ancak çözülebilir

$y = y_1 + z$, $z = z(x)$ dönüşümü ile denklem bernoulli denklemine dönüşür,

orj. s. 6

Tam diferansiyelli denklem

Eğer $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ (1)

$u(x,y)$ fonksiyonunun tam diferansiyeli

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$
$$= u_x\,dx + u_y\,dy$$

şeklinde verilebilir.

Eğer, $u_x = M(x,y)$, $u_y = N(x,y)$ olacak şekilde bir $u(x,y)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa (1) denklemine tam diferansiyelli denklem denir,

Teorem

(1) denkleminin basit bağlantılı bir D bölgesinde tam diferansiyelli olması için

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (x,y) \in D \qquad (M_y = N_x)$$

koşulunun sağlanması gerek ve yeterdir
M_y ve N_x D de süreklidir

orj. s. 7

$u(x,y) = c_1$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$
$$u_x = M(x,y)$$
$$u_y = N(x,y) \qquad du(x,y) = 0$$

[1] Claude notu: sağ taraftaki $b\,x$ muhtemelen $b(x)$ olmalı.

$$u_x = M(x,y) \longrightarrow u(x,y) = \int M(s,y)\,ds + \Phi(y)$$

$$u_y = \int M_y(s,y)\,ds + \Phi'(y) = N(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi'(y) = N(x,y) - \int M_y(s,y)\,ds$$

$$\Phi(y) = \int N(x,y)\,dx - \iint M_y(s,y)\,ds\,dy \boxed{?} + c$$ [2]

kısaca işlem adımları şöyledir
M'i integralleyerek u fonksiyonuna ulaşmaya çalışırız. integralleyince y'ye bağlı bir hata fonksiyonu ortaya çıkmaktadır. Bunu bulmak için u'yu y'ye göre türevini alırız sonra N'e eşitleriz oradan da tekrar integral alarak hata terimini tespit ederiz.
veya N'den başlayarak işlemlere başlanılabilir o zaman hata fonksiyonu

orj. s. 8 x'e bağımlı olur,

İntegrasyon çarpanı

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ denklemi tam diferansiyel olmasın ($M_y \neq N_x$). Eğer $\mu M(x,y)\,dx + \mu N(x,y)\,dy = 0$ denklemini tam diferansiyelli denklem yapacak şekilde bir $\mu \neq 0$ çarpanı bulunabiliyorsa ona integrasyon çarpanı denir.

★ yalnızca x'e bağlı integrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx} \qquad \left(\frac{M_y - N_x}{N} \rightarrow \text{bu ifade sadece } x\text{'e bağlı olmalı}\right)$$

★ yalnızca y'ye bağlı integrasyon çarpanı[3]

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{M_y - N_x}{M}\,dx} \qquad \left(\frac{M_y - N_x}{M} \rightarrow \text{bu ifade sade } y\text{'ye bağlı olmalı}\right)$$

orj. s. 9

(3) Tam diferansiyelin ayrılması

Bazı tam diferansiyeller aşağıda veriliyor

$$d(xy) = x\,dy + y\,dx$$

$$y^2\,d\left(\frac{x}{y}\right) = y\,dx - x\,dy$$

$$x^2\,d\left(\frac{y}{x}\right) = x\,dy - y\,dx$$

$$d(f(x)) = F(x)\,dx \qquad F(x) = f'(x)$$

$$d(x^2) = 2x\,dx \qquad d(\ln y) = \frac{1}{y}\,dy$$

[2] Claude notu: $\int N(x,y)\,dx$ terimindeki dx muhtemelen dy olmalı.
[3] Claude notu: aşağıdaki üsteki integral muhtemelen dy ile olmalı.

Claude ile dijitalleştirildi · hata içerebilir / Digitised with Claude · may contain errors