Diferansiyel Denklemler

9. Hafta – Euler denklemleri, mertebenin indirgenmesi, seri çözümlerine giriş

Orijinal not: diferansiyel-ders-notu-9.hafta.pdf



UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

Örnek

orj. s. 1

$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz

$$x = e^t \qquad x > 0$$

$$\Downarrow$$

$$t = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t e^{-t}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\ e^{-t} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$$

Denklemde yerine yazarsak

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}(y''_t - y'_t) - 3e^t e^{-t} y'_t + 4y = 0$$

$$y''_t - y'_t - 3y'_t + 4y = 0$$

$$y''_t - 4y'_t + 4y = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$(k-2)^2 = 0 \qquad k_{1,2} = 2$$

$$e^{2t},\ te^{2t} \rightarrow t = \ln x \rightarrow e^{2\ln x} = x^2$$

$$\rightarrow \ln x e^{2\ln x} = \ln x x^2$$

orj. s. 2

Genel çözüm

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x^2\ln x$$

Örnek

$x^2y'' + xy' + 4y = 0$

$$x = e^t \qquad x > 0 \qquad t = \ln x \qquad y' = e^{-t}y'_t$$

$$y'' = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$$

Denkleme yazarsak:

$$\underbrace{e^{2t}\cdot e^{-2t}}_{1}(y''_t - y'_t) + \underbrace{e^t\cdot e^{-t}}_{1}\cdot y'_t + 4y = 0$$

$$y_t'' - y_t' + y_t' + 4y = 0$$
$$y_t'' + 4y = 0 \rightarrow \text{karakteristik denklem}$$
$$k^2 + 4 = 0 \qquad k = \mp 2i$$
$$x_1 = \cos 2t \qquad x_2 = \sin 2t$$

$t = \ln x$ olduğunda[1]

$$x = \cos(2\ln x),\ \sin(2\ln x)$$

Örnek

orj. s. 3

$x^3y'' - 2xy = -6\ln x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\rightarrow x$'e böl

$$x^2y'' - 2y = -\frac{6\ln x}{x}$$

$x > 0$ için $x = e^t$ dönüşümü ile $t = \ln x$

$$x^2y'' - 2y = -\frac{6\ln x}{x}$$

$$y' = y_t' e^{-t}$$
$$y'' = e^{-2t}(y_t'' - y_t')$$

$$e^{2t}e^{-2t}(y_t'' - y_t') - 2y = -\frac{6\ln e^t}{e^t}$$

$$y_t'' - y_t' - 2y = \frac{-6t}{e^t} \qquad \text{(lineer homojen olmayan denklem)}$$

Biliyoruz ki $y = y_h + y_p$

orj. s. 4

Homojen kısım için

$$k^2 - k - 2 = 0$$
$$(k-2)(k+1) = 0$$
$$-2 \qquad 1$$
$$k = 2 \qquad k = -1$$

$$y_h = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$$
$$y_t'' - y_t' - 2y = -6te^{-t}$$

Belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım

$$\downarrow$$
$$te^{-t}$$
$$(\lambda+1)^2 \nearrow e^{-t}\cdot te^{-t}$$
$$\downarrow$$
$$(\lambda+1)^3$$

(Notta daire içindeki e^{-t}'den te^{-t}'ye bir ok çizilmiş.)

[1] Claude notu: aşağıdaki satırda muhtemelen $y_1 = \cos(2\ln x)$, $y_2 = \sin(2\ln x)$ olmalı (çözümler y için).

Çözümler e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}

$$y_p = B_0\, te^{-t} + B_1\, t^2e^{-t}$$
$$y_p' = B_0e^{-t} - B_0te^{-t} + B_1\, 2te^{-t} - B_1t^2e^{-t}$$
$$y_p' = (B_0 - (B_0 + 2B_1)t)e^{-t} - B_1t^2e^{-t2}$$

orj. s. 5

$$y_p'' = -(B_0 + 2B_1)e^{-t} - (B_0 - (B_0 + 2B_1)e^{-t} - 2B_1te^{-t} + B_1t^2e^{-t}$$
$$y_p'' = 2B_1 - 2B_0 - (4B_1 - B_0)t + B_1t^2)e^{-t}$$

$$(2B_1 - 3B_0)e^{-t} - (4B_1 - B_0 + 2B_1 - B_0 + 2B_0)\, te^{-t} = -6te^{-t}$$

$$2B_1 = 3B_0$$
$$-6B_1 = 6^3$$
$$B_1 = 1$$
$$B_0 = \frac{2}{3}$$

$$y_p = \frac{2}{3}te^{-t} + t^2e^{-t} = \left(\frac{2}{3}t + t^2\right)e^{-t}$$

$$y_{genel} = y_h + y_p$$
$$= c_1e^{2t} + c_2e^{-t} + \left(\frac{2}{3}t + t^2\right)e^{-t}$$
$$y_g = c_1e^{2\ln x} + c_2e^{-\ln x} + \left(\frac{2}{3}\ln x + (\ln x)^2\right)e^{-\ln x}$$
$$c_1x^2 + c_2\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{2}{3}\ln x + (\ln x)^2\,\frac{1}{x}\right)$$

Örnek

orj. s. 6

$x^3y''' - x^2y'' + 2xy - 2y = x^3$

genel çözüm bulunuz.[4]

$x > 0 \qquad x = e^t$

2. yol kullanımı → $y = x^r \qquad y' = rx^{r-1}$

$$y'' = r(r-1)x^{r-2} \qquad y''' = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$$

$$r(r-1)(r-2) - r(r-1)\underbrace{+2r-2}_{2(r-1)} = 0$$

$$r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0 \Rightarrow (r-1)(r^2 \underbrace{-3r}_{-2} \underbrace{+2}_{-1}) = 0$$

[2] Claude notu: bu satırda muhtemelen $(B_0 - (B_0 - 2B_1)t)e^{-t}$ olmalı; sonraki sayfadaki y_p''''nin ikinci satırı bu doğru ifadeyle uyumlu.

[3] Claude notu: denklemin sağ tarafı $-6te^{-t}$ olduğundan muhtemelen $-6B_1 = -6$ olmalı (sonuç $B_1 = 1$ ile uyumlu).

[4] Claude notu: muhtemelen $2xy'$ olmalı (aşağıdaki $2r$ terimi ile uyumlu).

$$\text{Yapma bunu} \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = 1 \end{cases}$$

$\downarrow \quad x = e^t$

$$y'''_t - 4y''_t + 5y'_t - 2y = e^{3t}$$

Karakteristik denklemi

$$k^3 - 4k^2 + 5k - 2 = 0 \qquad k_1 = 1 \quad k_2 = 1 \quad k_3 = 2$$

kökler $e^t,\ te^t,\ e^{2t}$

orj. s. 7

$$y_1 = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{2t}$$

$$y'''_t - 4y''_t + 5y'_t - 2y = e^{3t} \qquad y_p = B_0 e^{3t}$$

$$y_p = B_0 e^{3t}$$
$$y'_p = 3B_0 e^{3t}$$
$$y''_p = 9B_0 e^{3t}$$
$$y'''_p = 27B_0 e^{3t}$$

$$\underbrace{(27B_0 - 36B_0 + 15B_0 - 2B_0)}_{1} e^{3t} = e^{3t}$$

$$4B_0 = 1 \qquad B_0 = \frac{1}{4}$$

$$y_p = \frac{1}{4} e^{3t}$$
$$y_p = \frac{1}{4} e^{3 \ln x} = \frac{1}{4} x^3$$

$$y_{\text{genel}} = c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x^2 + \frac{1}{4} x^3 \qquad \forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Mertebenin indirgenmesi

orj. s. 8

$$a_0(x)\, y^n + a_1(x)\, y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \qquad (5)$$

denklemi verilsin ve bu denklemin bir $y_1 = y_1(x)$ çözümü bilinsin. Bu durumda

$$y = u\, y_1(x) \qquad u = u(x)$$

dönüşümüyle u'ya göre denklemde $u' = v$ dönüşümüyle (5) denklem mertebesi bir düşüyor.

$n = 2$ durumunda,

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

bir çözümü $y_1 = y_1(x)$ olsun.

$y = u \cdot y_1$ dönüşümü yapalım.

$$y' = u' y_1 + u y'_1$$
$$y'' = u'' y_1 + u' y'_1 + u' y'_1 + u y''_1$$

$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$ için

$$a_0(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') + a_1(vy_1' + v'y_1) + a_2vy_1 = 0$$

$$\underbrace{v(a_0y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1)}_{0} + a_0y_1v'' + (2a_0y_1' + a_1y_1)v' = 0$$

orj. s. 9

$$a_0y_1v'' + (2a_0y_1' + a_1y_1)v' = 0$$

denklemine indirgeniyor. Bu denklemde

$$v = v' \qquad v' = v''$$

$$a_0y_1v' + (2a_0y_1' + a_1y_1)v = 0$$

Örnek

$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ denkleminin bir çözümünün $y_1(x) = x$ olduğu biliniyor. Genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$y = vx \qquad v = v(x)$$
$$y' = v'x + v$$
$$y'' = v''x + v' + v' = v''x + 2v'$$

Denklemde yerine yaz.

$$(x^2 + 1)v''x + 2v' - 2x(v'x + v) + 2vx = 0$$
$$(x^2 + 1)v''x + (x^2 + 1)2v' - 2x^2v' \cancel{-2xv} \cancel{+2xv} = 0$$

$(x^2 + 1)xv'' + 2v' = 0$ denklemi elde edilir

orj. s. 10

$v = v'$ dönüşümü yaparsak $v' = v''$

$$x(x^2 + 1)v' + 2v = 0$$

$$v' + \frac{2v}{x(x^2 + 1)}v = 0$$

$$I(x) = e^{\int \frac{2}{x(x^2+1)}} \qquad x = \frac{1}{t}$$

$$= e^{\int \frac{2\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t^2}+1\right)}}$$

$$= e^{-\int \frac{2t\,dt}{t^2+1}}$$

$$= e^{-\ln(t^2+1)}$$

$$= (t^2 + 1)^{-1}$$

$$I(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right)^{-1} = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$\left[\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right) \cdot v\right]' = 0$$

$$\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right) \cdot v = c_1 \qquad v = c_1\frac{x^2 + 1}{x^2} \quad \forall c_1$$

orj. s. 11

$$v = \frac{c_1(1+x^2)}{x^2} \qquad \forall c_1$$

$v = u'$ olduğunda

$$u' = \frac{c_1(1+x^2)}{x^2} \qquad \text{integral al}$$

$$u = c_1 \int \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) dx$$

$$u = c_1 \left(-\frac{1}{x} + x\right) + c_2$$

$y = ux$ olduğundan çözüm

$$y = \left(c_1\left(-\frac{1}{x} + x\right) + c_2\right) x \qquad /\!/$$

$$y = c_1(x^2 - 1) + c_2 x \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Örnek

orj. s. 12

$(1-2x^2)y'' + 2y' + 4y = 0$ denkleminin çözümünün $y_1(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots a_{n-1}x + a_n$ şeklinde bir polinom olduğu biliniyor. Genel çözümünü bulunuz.

Önce polinomun derecesini belirleyelim.

$$y_1(x) = x^n + \cdots + \qquad y_1'(x) = nx^{n-1} + \cdots \qquad y_1''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$-2x^2 n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots + 2nx^{n-1} \cdots 4x^n = 0$$

$$\underbrace{(-2n(n-1) + 4)}_{0} x^n = 0$$

$$-2n^2 + 2 + 4 = 0^5$$

$n \nearrow 2$, $n \searrow -1$ — -1 polinom olduğu için alamayız

Demek ki $y_1(x) = x^2 + a_1 x + a_2$ şeklindeymiş

$$y_1'(x) = 2x + a_1$$
$$y_1''(x) = 2$$

$$(1-2x)\,2 + 2(2x + a_1) + 4(x^2 + a_1 x + a_2) = 0^6$$

orj. s. 13

$$\underbrace{(4 + 4a_1)}_{0} x + \underbrace{(2 + 2a_1 + 4a_2)}_{0} = 0$$

$$a_1 = -1 \qquad a_2 = 0$$

Demek ki $y_1(x) = (x^2 - x)$

[5] Claude notu: muhtemelen $-2n^2 + 2n + 4 = 0$ olmalı (kökler $n = 2$, $n = -1$ bununla uyumlu).
[6] Claude notu: muhtemelen $(1-2x^2)\,2$ olmalı (sonraki sayfadaki sonuç bununla uyumlu).

Demek ki

$$y = u\,y_1(x)$$
$$y = u(x^2 - x) \quad \text{arayalım}$$

$$y' = ?$$
$$y'' = ?$$

$$(1-2x^2)(x^2-x)u'' + (1-2x^2)(4x-2) + 2(x^2-x)u' = 0$$

Diferansiyel Denklemlerin Seri Çözümleri

orj. s. 14

Analitik fonksiyonlar

Bir $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığında tanımlı, sonsuz mertebeden türevlenebilen bir $f(x)$ fonksiyonu verilsin. Bir $x_0 \in I$ noktası alalım.

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{serisine } f(x)$$

fonksiyonunun x_0 noktasındaki Taylor serisi denir.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 0$ noktasında her mertebeden türevi vardır. ve $f^n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ancak $x = 0$ noktası civarında $f(x)$'e eşit değildir.

Tanım

Eğer $x = x_0$ noktasında $f(x)$ fonksiyonunun Taylor serisi x_0 noktasının civarında yakınsaksa ve yakınsak olduğu fonksiyon $f(x)$'e eşitse, $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında analitiktir denir.

orj. s. 15

e^x $\sin x$ $\cos x$ analitik fonk.

$$f(x) = \frac{1+x}{(x^2-3x+2)}$$

Bu fonksiyon 2, 1 noktaları dışında her yerde analitiktir.

orj. s. 16

(Bu sayfa ders tahtasının fotoğrafı; tahtada yazılanlar:)

$$a_0(x-x_0)^2y'' + a_1(x-x_0)y' + a_2y = 0$$

Örnek

$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

? *Denk.* genel çözümünü bulunuz

$$x = e^t, \quad x > 0$$
$$\Downarrow$$
$$t = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t \cdot e^{-t}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$$

Şekil: Fotoğrafın sol kenarında kesik bir başlık (“...nklemler”) ve sağdaki ikinci tahta panelinde kısmen görünen satırlar: “Denklemde y...”, $e^{2t}e^{-2t}(\dots, y_t \dots, t = \ln x$ (kesik, okunamıyor).
(orijinal notta, s. 16)