Diferansiyel Denklemler

Vize sonrası – Cauchy–Euler, mertebe indirgeme, seri çözümleri, Laplace, konvolüsyon teoremi

Orijinal not: diferansiyel-not-vize-sonrasi-konvulasyon-teoremi.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

Cauchy-Euler denkleminin çözülmesi

orj. s. 1

$$a_0x^n y^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x)$$

$$\boxed{x = e^t} \qquad \boxed{t = \ln x}$$

Bu denklemin de karakteristik denklemi

$$a_0k(k-1)\cdots(k-n+1) + a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)$$
$$+ \cdots + a_{n-2}k(k-1) + a_{n-1}k + a_n = 0$$

Örnek

$x^2y'' + xy' + y = 4\sin(\ln x)$

1. Karakteristik denklem

$$r(r-1) + r + 1 = 0 \rightarrow r^2 + 1 = 0$$
$$y_t'' + y_t = 4\sin t$$

2. Homojen denklem

$$y_t'' + y_t = 0 \Rightarrow r^2 + 1 \Rightarrow r_1 = i,\ r_2 = -i$$
$$y_h(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$$

Özel çözüm bulunur

$$y_p(t) = t(A\cos t + B\sin t)$$

belirsiz katsayılar

$$\Rightarrow y_p(t) = -2t\cos t$$

orj. s. 2

O zaman

$$y(t) = c_1\cos t + c_2\sin t - 2t\cos t$$

$t = \ln x$

$$y(x) = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x) - 2\ln x\cos(\ln x);\qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Mertebelerin indirgenmesi

orj. s. 3

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

denklemi verilsin
$y_1 = y_1(x)$ çözümü bilinsin.

Bu durumda

"$y = u \cdot y_1$; $u = u(x)$" dönüşümüyle

ve daha sonraki adımda

$u' = v$ dönüşümüyle denklemin mertebesi düşer. Böylece $(n-1)$. mertebe denklem elde edilir

Hatırlatma

orj. s. 4

$$\text{Taylor serisi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

* Eğer $x = x_0$ noktasında $f(x)$ fonksiyonunun taylor serisi x_0 noktasının civarında yakınsaksa ve yakınsak olduğu fonksiyon $f(x)$'e eşitse, "$f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında analitiktir" denir.

Serisel Çözümler

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

2. mertebeden lineer ve homojen diferansiyel denklem verilsin.

- Eğer, $p(x)$ ve $q(x)$ katsayıları bir x_0 noktasında analitik olurlarsa x_0 noktasına denklemin adi noktası denir.
- Eğer, $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarından birisi veya herikisi x_0 noktasında analitik değillerse, x_0 noktasına denklemin "tekil (singüler) noktası" denir.

orj. s. 5

* Eğer $x = x_0$ noktası denklemin adi noktası olursa, bu durumda denklemin her çözümü bir $|x - x_0| < r$ $(r > 0)$ aralığında yakınsak olan

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \quad \text{şeklinde}$$

fonksiyonlardır.

Adi nokta civarında çözüm yolu

1. Denklemi normal forma dönüştür yani

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

2. Bir adi nokta x_0 olarak seçilir.
3. $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ şeklinde seçilir

c_n katsayılarını bulmak için türevleri alıp, denklemde (ilk denklem) yerine yazarız.
(Not $x_0 \neq 0$ dan ise $x - x_0 = t$ denilerek çözüme ulaşılır böylece daha kolay olur)

orj. s. 6

4. katsayılar bulunduktan sonra serinin birkaç terimini yazarız
5. Başlangıç değer problemi ise başlangıç koşulları koyulup kalan katsayılar bulunur
6. $t = x - x_0$ koyulur ve $y(x)$ bulunur
7. genel çözüm
   sırasıyla $c_0 = 0,\ c_1 = 1$
   sonra $c_0 = 1$ ve $c_1 = 0$
   vererek iki temel çözüm bulunur
   ve çözüm bunların lineer kombinasyonudur

orj. s. 7

* Eğer $x = x_0$ denklemin bir tekil noktasıysa ancak $(x - x_0)p(x)$ ve $(x - x_0)^2 q(x)$ fonksiyonları $x = x_0$ noktasında analitik fonksiyonlar olursa $x = x_0$ noktasına denklemin "regular tekil noktası" denir.

Forbenius yöntemi;

Eğer $x = x_0$ noktası denklemin regular tekil noktası olursa bu nokta civarında denklemin

$$y(x) = |x - x_0|^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad c_0 \neq 0$$

genelleştirilmiş kuvvet serisi şeklinde çözümü var oluyor.

* Genelleştirilmiş kuvvet serisi yardımıyla çözüm yapılırken öncelikle

$$\boxed{r(r-1) + p_0 r + q_0} = 0$$

denkleminden r_1 ve r_2 bulunur.

$$p_0 = \lim_{x \to 0} x p(x) \quad \text{ve} \quad q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x) \text{ dir.}$$

Bu denkleme $x = 0$ regüler tekil noktası için "indis denklemi" denir.

orj. s. 8

Daha sonrasında aşağıdaki durumlar geçerli olur

1) $r_1 - r_2 \neq 0,1,2,3,\cdots$ (negatif olmayan tamsayı değil) ise

$$y_1(x) = x^{r_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_0 \neq 0 \quad \text{ve}$$

$$y_2(x) = x^{r_2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^n, \quad c_0^* \neq 0$$

2) $r_1 - r_2 = 1,2,3,\cdots$ (doğal sayılar) ise

$$y_1(x) = x^{r_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_0 \neq 0$$

ve

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^n + c\, y_1(x) \ln x \qquad c_0^* \neq 0, \quad c \text{ constant}$$

3) $r_1 - r_2 = 0$ ise

$$y_1(x) = x^{r_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_0 \neq 0 \quad \text{ve}$$

$$y_2(x) = x^{r_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^n + y_1(x) \ln x$$

(2) ve (3) durumlarında $y_2(x)$ çözümleri $y_1(x)$ çözümü bilindikten sonra mertebe düşürmekle elde edilir

Laplace

orj. s. 9

Bir $f(x)$, $x > 0$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

integrali tanımlı ise bu F fonksiyonuna f'in Laplace dönüşümü denir.

$$F(s) = \mathcal{L}(f(x) \qquad \text{ve} \qquad \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$$

* $f(x)$, $x > 0$ fonksiyonu ve $a > 0$ için

$$\begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ f(x-a) & x > a \end{cases} \quad \text{fonksiyonuna}$$

"geçiş fonksiyonu" denir.

Birim basamak fonksiyonun

$$u_a(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ 1, & x > a \end{cases} \quad \text{tanımına göre}$$

orj. s. 10

geçiş fonksiyonu için

$$u_a(x) f(x-a) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ f(x-a), & x > a \end{cases} \quad \text{olur}$$

* Bazı fonksiyonların Laplace dönüşümleri aşağıdaki gibidir

$f(x),\ x>0$	$F(s)=\mathcal{L}(f(x))$
1	$1/s$
x	$1/s^2$
x^n	$n!/s^{n+1}$
e^{ax}	$1/s-a$
$\sin(ax)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(ax)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
Özellikler	
$e^{ax}f(x)$	$F(s-a)$
$f^{(n)}(x)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)$
	$-s^{n-2}f'(0)-\cdots$
	$-f^{(n-1)}(0)$
$x^nf(x)$	$(-1)^nF^{(n)}(s)$
$u_a(x)f(x-a)$	$e^{-as}F(s),\ a>0$

Konvulasyon teoremi

orj. s. 11

* Eksponsiyonel dereceli ve her $0\le x\le b$ aralığında parçalı sürekli f ve g fonksiyonlarının konvolusyonu

$$f(x)*g(x)=\int_0^x f(z)\,g(x-z)\,dz$$

integrali ile belirlenmiş $f*g$ fonksiyonuna denir.

Ayrıca, $f*g=g*f$ dir

* Eğer f ve g fonksiyonları e^{at} exsponansiyonel dereceli ve her $0\le x\le b$ aralığında parçalı sürekli iki fonksiyon olursa, o halde $f*g$ konvolüsyonun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}[f*g]=\mathcal{L}[f]\cdot\mathcal{L}[g]$$

ve

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)\cdot G(s)]=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]*\mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$