Diferansiyel Denklemler

1. Hafta – Diferansiyel denklemlere giriş (teori)

Orijinal not: diferansiyel-teori-1-hafta-notum.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

Diferansiyel denklemler

orj. s. 1

ODE PDE

Tanım

x serbest değişken, $y = y(x)$ ona bağlı bir fonksiyon ve bu fonksiyonun $y', y'', \cdots y^{(n)}$ arasındaki

$$F(x, y, y', y'', \cdots y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

şeklindeki denklemlere adi diferansiyel denklem denir.

eğer F fonksiyonu y ve onun türevlerine göre yani $(y', y'', \cdots, y^{(n)})$ lineer olursa bu durumda (1)'e lineer adi dif denklem denir

Örneğin: 1. mertebeden lineer adi diferansiyel denklem en genel şekli

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$$

2. mertebeden lineer adi dif den en genel şekli

$$a_1(x)\,y''(x) + a_2(x)\,y' + a_3(x)\,y = b(x) \quad \text{olur}$$

Örnek

$3y\,y' + y^2 - 2x$	lineer olmayan birinci mertebeden adi dif denk
$(1 + x^2)\,y' + 2x\,y = 3$	lineer birinci mertebeden adi dif denk.
$y'' + 2x\,y' + x^2\,y = \sin x$	2. mertebeden lineer adi dif denk
$y''' + 3y^2 = 5$	3. „ lineer olmayan adi dif denklem

(1) denkleminde $n = 1$ alırsak

$$F(x, y, y') = 0$$

1. mertebeden dif denk en genel halde elde edilir.

Eğer bu denklem y'nin türevine göre çözülebiliyorsa $y' = f(x, y)$ şeklinde yazılabiliyorsa 1. mertebeden açık adi dif denk denir.

orj. s. 2

Eğer $y = \varphi(x)$ fonksiyonu $I = (\alpha, \beta)$ aralığında n. mertebeden sürekli türevlere sahip ve her $x \in I$ için

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

sağlıyorsa, bu durumda $y = \varphi(x)$ fonksiyonu I aralığında (1) denkleminin çözümüdür.

Örneğin: $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}}$ fonksiyonu I aralığında

$$y = xy' + \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \qquad \text{denkleminin çözümüdür.}$$

$$y' = 1 \qquad x + \frac{1}{\sqrt{2}} = x + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Tanım

(1) denklemini $\varphi(x, y) = 0$ şeklindeki kapalı fonksiyon çözümüne onun integrali denir.

En basit adi dif denklemler;

① $y' = f(x)$ (veya $\frac{dy}{dx} = f(x)$) normalde $y = f(x, y)$

Eğer $f(x)$ fonksiyonunun ilkelleri $F(x) + c$, c = sabit ise o halde bu denklemin çözümü

$$y = \int f(x)\,dx + C = F(x) + C$$

Örnek: $y' = 2x$, $y = \int 2x\,dx = x^2 + C$

Not: bir adi dif denklemin sonsuz sayıda çözümü vardır.

② $y' = f(y)$ $\left(\frac{dy}{dx} = f(y)\right)$

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}, \qquad f(y) \neq 0$$

$$x = \underbrace{\int \frac{1}{f(y)}\,dy + C}_{G(y)+C}$$

Burada $G(y)$ fonksiyonu $\frac{1}{f(y)}$'nin ilkelidir

Örnek

orj. s. 3

$y' = x + \sin x$

$$y = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$$

Örnek

$y' = y^2 + y$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + y$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2 + y} \qquad y^2 + y \neq 0$$

$$x = \int \frac{1}{y^2 + y}\,dy + C$$

$$= \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy + C$$

$$= \ln|y| - \ln|y+1| + C$$

$$\frac{1}{y^2+y} = \frac{1}{y(y+1)} = \overset{=1}{\frac{A}{y}} + \overset{=-1}{\frac{B}{y+1}}$$

$$x = \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

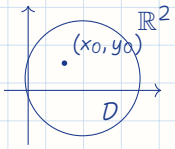
$$y = 0,\ y = -1$$

$$y^2 + y = 0 \Rightarrow y = 0,\ y = -1$$

denklemde koyarız
denklemi sağladıkları için çözümdür

1.2 Cauchy Problemi (veya başlangıç değer problemi)

$y = f(x,y)$ denklemini alalım. $f(x,y)$ fonksiyonu bir $D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde tanımlı olsun. Bir $(x_0, y_0) \in D$ noktasını alalım, $y' = f(x,y)$ denkleminin $y(x_0) = y_0$ koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine Cauchy problemi / başlangıç değer problemi denir.



$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x,y) \quad \cdots \quad (2a) \\ y(x_0) &= y_0 \qquad\quad (2b) \end{aligned}\right\} \ (2)$$

x_0, y_0 değerlerine başlangıç verileri, $(2b)$'ye başlangıç koşulu denir.

orj. s. 4

Şimdi: $y' = f(x,y)$, $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ denklemi için bazı çözüm yöntemleri belirleyelim

$f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ olduğunu kabul edersek denklemi simetrik şekilde

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

denk denklemine dönüşür

② Ayrılabilir denklemler

$y' = f_1(x) f_2(y)$ şeklinde veya

$M_1(x) M_2(y)\,dx + N_2(y) \cdot N_1(x)\,dy = 0$ şeklindeki denklemlere

ayrılabilir denklemler denir.

Eğer $M_2(y) N_1(x) \neq 0$ ise

$$\frac{M_1(x) M_2(y)\,dx}{M_2(y) N_1(x)} + \frac{N_2(y) N_1(x)\,dy}{M_2(y) N_1(x)} = 0$$

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = 0$$

elde edilir. Bu eşitliği integrallersek

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = C, \qquad \forall C \in \mathbb{R}$$

elde edilir ki bu da ayrılabilir dif denk çözümüdür

$M_2(y) = 0$, $N_1(x) = 0$ olduğu durumlara ayrıca kontrol edilmelidir

Örnek

$x(1+y^2)+y(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}=0$ denkleminin integralleyiniz

$$x(1+y^2)\,dx+y(1+x^2)\,dy=0$$
$$(1+y^2)(1+x^2)\neq 0$$
$$\frac{x}{1+x^2}\,dx+\frac{y}{1+y^2}\,dy=0$$
$$\int\frac{x}{1+x^2}\,dx+\int\frac{y}{1+y^2}\,dy=0$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{2y}{1+y^2}\,dy=0$$
$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=c$$

orj. s. 5

$$\ln(1+x^2)(1+y^2)=2C$$
$$\underbrace{(1+x^2)(1+y^2)=c_1}_{\text{çözüm ailesi}},\qquad c_1=e^{2C}>0$$

Örnek

$\begin{cases} y'=xy^2+2xy \\ y(0)=1 \end{cases}$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx}=x(y^2+2y)$$
$$dy-x(y^2+2y)\,dx=0$$
$$y^2+2y\neq 0,$$
$$\frac{dy}{y^2+2y}-x\,dx=0$$
$$\int\frac{dy}{y^2+2y}-\int x\,dx=C,\qquad C\in\mathbb{R}$$
$$\frac{1}{y^2+2y}=\frac{1}{y(y+2)}=\frac{\overset{=\frac{1}{2}}{A}}{y}+\frac{\overset{=-\frac{1}{2}}{B}}{y+2}$$
$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+2}\right)dy-\frac{x^2}{2}=0$$
$$\frac{1}{2}\left(\ln|y|-\ln|y+2|\right)-\frac{x^2}{2}=c$$
$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right|-x^2=2C\qquad\left|\frac{y}{y+2}\right|=e^{x^2}e^{2C}$$
$$\frac{y}{y+2}=\mp e^{2C_1}e^{x^2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{y}{y+2}=Ce^{x^2},\quad C=\mp e^{2C_1}\longrightarrow\quad y=yCe^{x^2}+2Ce^{x^2}$$
$$y(1-Ce^{x^2})=2Ce^{x^2}$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{2Ce^{x^2}}{1-Ce^{x^2}},\qquad \text{burada } C=\mp e^{2C_1}\neq 0$$

$$y^2 + 2y = 0 \rightarrow y(y+2) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} y = 0 \checkmark \text{ çözüm} \\ y = -2 \checkmark \left(\begin{array}{l} 0 = 4x - 4x \\ 0 = 0 \end{array} \right) \checkmark \end{array}$$

orj. s. 6

$$y(\overset{x_0}{0}) = \overset{y_0}{1}$$

$$1 = \frac{2Ce^0}{1 - Ce^0}$$
$$1 - C = 2C$$
$$3C = 1$$
$$C = \frac{1}{3}$$

Başlangıç değer probleminin çözümü

$$y = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}e^{x^2}}{1 - \frac{1}{3}e^{x^2}} = \frac{2e^{x^2}}{3 - e^{x^2}} \quad \text{olur}$$

Örnek

$e^x\,dx - (1+e^x)\,y\,dy = 0$ denkleminin $(0,1)$ noktasından geçen integral eğrisini bulunuz

$$\begin{cases} e^x\,dx - (1+e^x)\,y\,dy = 0 \\ y(1) = 1^{1} \end{cases}$$

$$\frac{e^x}{1+e^x}\,dx - y\,dy = 0$$
$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx - \int y\,dy = C$$
$$\ln(1+e^x) - \frac{y^2}{2} = 0$$
$$y^2 = 2\ln(1+e^x) - 2C$$
$$y^2 = 2\ln(1+e^x) + C, \qquad \forall C \in \mathbb{R}$$
$$1 = 2\ln(1+e^0) + C$$
$$C = 1 - 2\ln(2)$$
$$\Rightarrow y^2 = 2\ln(1+e^x) + 1 - 2\ln(2) = 2\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) + 1$$

③ Ayrılabilen denkleme indirgenebilen denklemler

orj. s. 7

(3.1) $y' = f(ax + by + c)$

denklemi $ax + by + c = z$, $z(x)$ dönüşümüyle $z' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{z' - a}{b}$ olduğuna göre

$$z' = a + b\,f(z)$$

şeklinde dönüşür, bu bir ayrılabilir denklemdir

[1] Claude notu: $(0,1)$ noktası için muhtemelen $y(0) = 1$ olmalı (aşağıda $x = 0$ kullanılmış).

Örnek

$y' = \cos(x - y - 1)$ denklemini çözünüz

Çözüm: $z = x - y - 1, \quad z = z(x)$

$$z' = 1 - y' \rightarrow y' = 1 - z'$$

yerine yazarsak,

$$1 - z' = \cos(z)$$
$$z' = 1 - \cos z$$
$$\frac{dz}{dx} = 1 - \cos z \Rightarrow dz - (1 - \cos z)\,dx = 0$$
$$1 - \cos z \neq 0 \text{ ise } \int \frac{dz}{1 - \cos z} = \int dx$$

$\cos 2z = 1 - 2\sin^2 z$ $\quad \cos z = 1 - 2\sin^2 \frac{z}{2}$ $\quad 2\sin^2 \frac{z}{2} = 1 - \cos z$

$$\int \frac{dz}{2\sin^2 \frac{z}{2}} = x + C \Rightarrow -\cot\left(\frac{z}{2}\right) = x + c$$
$$\cot\left(\frac{x - y - 1}{2}\right) = -x - c$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sin^2 \frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sin^2 u}$$ [2]
$$= -\cot u$$
$$= -\cot\left(\frac{z}{2}\right)$$

$1 - \cos z = 0 \Rightarrow \cos z = 1 \Rightarrow z = 2n\pi, \quad n = 0,1,2,\ldots$

$x - y - 1 = 2n\pi \Rightarrow y = x - 2n\pi - 1$ böylece çözüm ailesi

$$\cot\left(\frac{x - y - 1}{2}\right) = -x + c, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$
$$y = x - 2n\pi - 1 \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

orj. s. 8

③ Ayrılabilen denkleme indirgenebilen denklemler

$f(tx, ty) = f(x, y)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

④ Homojen denklemler;

$y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$ [3] şeklindeki denklemlere homojen denklemler denir.

bu denklem $\frac{y}{x} = u, \quad u(x) = u$, dönüşümü ile ayrılabilir denk dönüştürülür.

$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + x \cdot u'$

yerine yazarsak $\quad u + xu' = f(u)$

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

[2] Claude notu: $u = z/2$, $dz = 2\,du$ olduğundan muhtemelen $\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sin^2(z/2)} = \int \frac{du}{\sin^2 u}$ olmalı (sonuç $-\cot u$ bununla uyumlu).

[3] Claude notu: aşağıdaki $\frac{y}{x} = u$ dönüşümüne göre muhtemelen $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ olmalı.

$$f(u) - u \neq 0 \quad \text{——} \quad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

ve bu eşitliği integrallersek çözüm elde ederiz