Diferansiyel Denklemler

10. Hafta Uygulama – Mertebe indirgeme yöntemi (bir çözümü verilen denklemler)

Orijinal not: 10.hafta.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

Örnek (Soru)

orj. s. 1

$2x^2y'' + 3xy' - y = 0$; $x > 0$ denkleminin $y = x^{-1}$ çözümü verilmiş olsun. Genel çözümü bulunuz.

Çözüm: $y = u \cdot x^{-1}$; $u = u(x)$ dönüşümü yapalım.

$$y = u \cdot x^{-1} \Rightarrow y' = u'x^{-1} - x^{-2}u \Rightarrow y'' = u''x^{-1} - x^{-2}u' - x^{-2}u' + 2x^{-3}u$$

Denklemde yerine yazarsak,

$$2x^2\left(u''x^{-1} - 2x^{-2}u' + 2x^{-3}u\right) + 3x\left(u'x^{-1} - x^{-2}u\right) - ux^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow 2xu'' - 4u' + 4x^{-1}u + 3u' - 3x^{-1}u - ux^{-1} = 0 \Rightarrow 2xu'' - u' = 0$$

Şimdi, $u' = v$ dönüşümü yapalım.

$$2xv' - v = 0 \Rightarrow v' - \frac{1}{2x}v = 0 \rightarrow \text{Lineer denklemdir ve } a(x) = -\frac{1}{2x}.$$

integrasyon çarpanı $\Rightarrow I(x) = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx} = x^{-\frac{1}{2}}$

Lineer denklemin her tarafını $x^{-\frac{1}{2}}$ ile çarpalım.

$$\underbrace{x^{-\frac{1}{2}}v' - x^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2x}v}_{} = 0 \Rightarrow \left(x^{-\frac{1}{2}}v\right)' = 0 \Rightarrow x^{-\frac{1}{2}}v = c \Rightarrow v = cx^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow u' = cx^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u(x) = c\int x^{\frac{1}{2}}dx \Rightarrow u(x) = \overbrace{\frac{2c}{3}}^{c_1}x^{\frac{3}{2}} + c_2$$

$$\Rightarrow y = \left(c_1x^{\frac{3}{2}} + c_2\right)x^{-1} \Rightarrow \boxed{y(x) = c_1x^{\frac{1}{2}} + c_2x^{-1}} \quad ; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Örnek (Soru)

orj. s. 2

$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$, $x > 0$ denkleminin $y = x$ verilmiş bir çözümü olsun. Mertebe indirgeme yöntemini kullanarak genel çözümü bulunuz.

Çözüm: $y = ux$; $u = u(x)$ dönüşümü yapalım.

$$y = ux \Rightarrow y' = u'x + u \Rightarrow y'' = u''x + u' + u' = u''x + 2u'$$

Denklemde yerine yazarsak,

$$x^2(u''x + 2u') - x(x+2)(u'x + u) + (x+2)ux = 0$$

$$\Rightarrow x^3u'' + 2x^2u' - x^3u' - 2x^2u' - x^2u - 2xu + x^2u + 2xu = 0$$

$$\Rightarrow x^3u'' - x^3u' = 0 \underset{x>0}{\Rightarrow} u'' - u' = 0$$

Şimdi, $u' = v$ dönüşümü yapalım.

$$v' - v = 0 \rightarrow \text{Lineer denklemdir ve } a(x) = -1 \text{ dir.}$$

integrasyon çarpanı $\Rightarrow I(x) = e^{-\int dx} = e^{-x}$

Lineer denklemin her tarafını e^{-x} ile çarpalım.

$$\underbrace{e^{-x}v' - ve^{-x}}_{} = 0 \Rightarrow (e^{-x} \cdot v)' = 0 \Rightarrow e^{-x}v = c \Rightarrow v = ce^x$$

$$\Rightarrow u' = ce^x \Rightarrow u(x) = c\int e^x\,dx \Rightarrow u(x) = ce^x + c_1$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = cxe^x + c_1x} \quad ; c, c_1 \in \mathbb{R}$$

Örnek (Soru)

orj. s. 3

$(x-1)y'' - xy' + y = 0$; $x > 1$ denkleminin $y = e^x$ verilmiş bir çözümü olsun. Genel çözümü bulunuz.

Çözüm: $y = ue^x$; $u = u(x)$ dönüşümü yapalım.

$$y = ue^x \Rightarrow y' = u'e^x + ue^x \Rightarrow y'' = u''e^x + u'e^x + u'e^x + ue^x$$

Denklemde yerine yazarsak,

$$(x-1)(u''e^x + 2u'e^x + ue^x) - x(u'e^x + ue^x) + ue^x = 0$$

$$\Rightarrow xu'' + 2xu' + xu - u'' - 2u' - u - xu' - xu + u = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)u'' + (x-2)u' = 0$$

Şimdi, $u' = v$ dönüşümü yapalım.

$$(x-1)v' + (x-2)v = 0 \Rightarrow v' + \frac{x-2}{x-1}v = 0 \rightarrow \text{Lineer denklemdir ve } a(x) = \frac{x-2}{x-1}$$

integrasyon çarpanı

$$\Rightarrow I(x) = e^{\int \frac{x-2}{x-1}dx} = e^{\int \left(\frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right)dx} = e^{x - \ln(x-1)}$$

Lineer denklemin her tarafını $e^{x-\ln(x-1)}$ ile çarpalım.

$$\left(e^{x-\ln(x-1)}v' + \frac{x-2}{x-1}e^{x-\ln(x-1)}\right) = 0 \Rightarrow \left(e^{x-\ln(x-1)}v\right)' = 0 \Rightarrow e^{x-\ln(x-1)}v = c_1 \quad {}^{1}$$

$$\Rightarrow v = c_1e^{\ln(x-1)-x} \Rightarrow v = c_1e^{\ln(x-1)+\ln e^{-x}} \Rightarrow v = c_1e^{\ln(x-1)e^{-x}} \Rightarrow v = c_1e^{-x}(x-1)$$

$$\Rightarrow v' = c_1 e^{-x}(x-1) \Rightarrow v(x) = c_1 \int e^{-x}(x-1)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad v(x) = c_1\left[-e^{-x}(x-1) + \int e^{-x}\,dx\right]$$

$u = x-1 \Rightarrow du = dx$
$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

orj. s. 4

$$\Rightarrow v(x) = c_1\left[-e^{-x}(x-1) - e^{-x}\right] \Rightarrow v(x) = c_1\left[-e^{-x}(x-1+1)\right]$$

$$\Rightarrow v(x) = -c_1 x e^{-x} + c_2$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = -c_1 x + c_2 e^{x}} \quad ; \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Claude notu: muhtemelen ikinci terim $\frac{x-2}{x-1}e^{x-\ln(x-1)}$ v olmalı (v yazılmamış).

Örnek (Soru)

$xy'' - y' + 4x^3 y = 0$ denkleminin $y = \sin x^2 \;\; (x > 0)$ çözümü verilmiş olsun. Genel çözümü bulunuz.

Çözüm: $y = v \sin x^2$; $v = v(x)$ dönüşümü yapalım.

$$y = v\sin x^2 \Rightarrow y' = v'\sin x^2 + 2xv\cos x^2$$

$$\Rightarrow y'' = v''\sin x^2 + 2xv'\cos x^2 + 2xv'\cos x^2 + 2v\left(\cos x^2 - 2x\cdot x\sin x^2\right)$$

$$\Rightarrow y'' = v''\sin x^2 + 4xv'\cos x^2 + 2v\cos x^2 - 4vx^2\sin x^2$$

Denklemde yerine yazarsak,

$$x\left(v''\sin x^2 + 4xv'\cos x^2 + 2v\cos x^2 - 4vx^2\sin x^2\right) - v'\sin x^2 - 2xv\cos x^2 + 4x^3 v\sin x^2 = 0$$

$$\Rightarrow xv''\sin x^2 + 4x^2 v'\cos x^2 + 2vx\cos x^2 - 4vx^3\sin x^2 - v'\sin x^2 - 2xv\cos x^2 + 4x^3 v\sin x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x\sin x^2\, v'' + \left(4x^2\cos x^2 - \sin x^2\right)v' = 0$$

Şimdi, $v' = w$ dönüşümü yapalım.

$$x\sin x^2\, w' + \left(4x^2\cos x^2 - \sin x^2\right)w = 0$$

$$\Rightarrow w' + \left(\frac{4x\cos x^2}{\sin x^2} - \frac{1}{x}\right)w = 0 \rightarrow \text{Lineer denklemdir ve } a(x) = \frac{4x\cos x^2}{\sin x^2} - \frac{1}{x} \text{ dir.}$$

orj. s. 5

integrasyon çarpanı

$$\Rightarrow I(x) = e^{\int\left(\frac{4x\cos x^2}{\sin x^2} - \frac{1}{x}\right)dx} \underset{\substack{\downarrow \\ x^2 = u \\ 2x\,dx = du}}{=} e^{2\int \frac{\cos u}{\sin u}du - \int \frac{1}{x}dx} = e^{2\ln\sin x^2 - \ln x} = \frac{\sin^2 x^2}{x}$$

Lineer denklemin her tarafını $\frac{\sin^2 x^2}{x}$ ile çarpalım.

$$\frac{\sin^2 x^2}{x}w + \frac{\sin^2 x^2}{x}\left(\frac{4x\cos x^2}{\sin x^2} - \frac{1}{x}\right)w = 0 \Rightarrow \left(\frac{\sin^2 x^2}{x}w\right)' = 0 \Rightarrow \frac{\sin^2 x^2}{x}w = c_1$$

$$\Rightarrow w = \frac{c_1 x}{\sin^2 x^2}$$

$$\Rightarrow u' = \frac{c_1 x}{\sin^2 x^2} \Rightarrow u(x) = c_1 \int \frac{x\,dx}{\sin^2 x^2} \underset{\substack{x^2=u \\ 2x\,dx=du}}{\Rightarrow} u(x) = \frac{c_1}{2} \int \frac{1}{\sin^2 u}\,du$$

$$\Rightarrow u(x) = \overbrace{\left(-\frac{c_1}{2}\right)}^{c} \cot u + c_2 \Rightarrow u(x) = c\,\frac{\cos x^2}{\sin x^2} + c_2$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = c\cos x^2 + c_2 \sin x^2} \quad ; c, c_2 \in \mathbb{R}$$

Claude notu: muhtemelen ilk terim $\frac{\sin^2 x^2}{x} v'$ olmalı.