Diferansiyel Denklemler

12. Hafta Uygulama – Konvolüsyon ve Laplace dönüşümü

Orijinal not: dif-13.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

Hatırlatma

* Eksponsiyonel dereceli ve her sonlu $0 \le x \le b$ aralığında parçalı sürekli f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(z)\, g(x-z)\, dz$$

integrali ile belirlenmiş $f * g$ fonksiyonuna denir.
Ayrıca, $f * g = g * f$ dir.

* Eğer f ve g fonksiyonları e^{at} eksponsiyonel dereceli ve her $0 \le x \le b$ aralığında parçalı sürekli iki fonksiyon olursa, o halde $f * g$ konvolüsyonun Laplace dönüşümü için

$$\mathcal{L}\left[f * g\right] = \mathcal{L}\left[f\right] \cdot \mathcal{L}\left[g\right]$$

formülü geçerlidir.
Böylece $\mathcal{L}^{-1}\left[F(s) \cdot G(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right]$ elde edilir

Alıştırmalar

Örnek 1

$H(s) = \dfrac{1}{s^2 + 5s + 6}$ fonksiyonu için $\mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right]$ yi

(a) Basit kesirlere ayırarak
(b) Konvolüsyon kullanarak

çözünüz.

Çözüm: (a)

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1}{(s+3)(s+2)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2} \Rightarrow A = -1 \text{ ve } B = 1$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{-1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right] = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \Rightarrow$$

orj. s. 2

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right] = -e^{-3x} + e^{-2x}$$

(b)

$$H(s) = \frac{1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{(s+3)(s+2)} = \frac{1}{s+3}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right] = e^{-3x} * e^{-2x}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right] = \int_0^x e^{-3z}e^{-2(x-z)}\,dz = e^{-2x}\int_0^x e^{-z}\,dz = -e^{-2x}e^{-z}\Big|_0^x = \underline{-e^{-3x}+e^{-2x}}$$

Örnek 2

$H(s) = \dfrac{1}{s(s^2+9)}$ fonksiyonu için $\mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right]$ yi

(a) Basit kesirlere ayırarak
(b) Konvolüsyon kullanarak

çözünüz.

Çözüm: (a)

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+9)} = \underset{(s^2+9)}{\frac{A}{s}} + \underset{(s)}{\frac{Bs+C}{s^2+9}} \Rightarrow 1 = A(s^2+9) + (Bs+C)s$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{9},\ B = -\frac{1}{9},\ C = 0$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{9}\frac{s}{s^2+9} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right] = \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3^2}\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right] = \frac{1}{9} - \frac{\cos 3x}{9} = \frac{1-\cos 3x}{9}$$

orj. s. 3

(b)

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+9} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{3}\frac{3}{s^2+9}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\frac{3}{s^2+3^2}\right] \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right] = 1 * \frac{\sin 3x}{3}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right] = \int_0^x \frac{\sin 3z}{3}\,dz = -\frac{1}{3}\frac{\cos 3z}{3}\Big|_0^x = \frac{1-\cos 3x}{9}$$

Örnek 3

$\dfrac{dy}{dx} - y = e^{3x}$, $y(0) = 2$ başlangıç-değer problemini Laplace dönüşümü uygulayarak çözünüz.

Çözüm:

$$y' - y = e^{3x} \Rightarrow \mathcal{L}\left[y'\right] - \mathcal{L}\left[y\right] = \mathcal{L}\left[e^{3x}\right]$$

$$\Rightarrow s\mathcal{L}\left[y\right] - y(0) - \mathcal{L}\left[y\right] = \frac{1}{s-3} \underset{(y(0)=2)}{\Rightarrow} \mathcal{L}\left[y\right](s-1) = \frac{1}{s-3} + 2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[y\right] = \frac{1}{(s-3)(s-1)} + \frac{2}{s-1} \Rightarrow \mathcal{L}\left[y\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{s-3} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{2}{s-1}$$

$$\left[\frac{1}{(s-3)(s-1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-1} \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{e^{3x}}{2} - \frac{e^{x}}{2} + 2e^{x} \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{3e^{x} + e^{3x}}{2}}$$

orj. s. 4

Örnek 4

$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 18e^{-x}\sin 3x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$ başlangıç-değer problemini Laplace dönüşümü kullanarak çözünüz.

Çözüm:

$$y'' - y' - 2y = 18e^{-x}\sin 3x \Rightarrow \mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y'] - 2\mathcal{L}[y] = 18\,\mathcal{L}[e^{-x}\sin 3x]$$

$$\Rightarrow s^2\mathcal{L}[y] - \cancel{s\overset{0}{y(0)}} - y'(0) - s\mathcal{L}[y] + \cancel{\overset{0}{y(0)}} - 2\mathcal{L}[y] = 18\,\mathcal{L}[e^{-x}\sin 3x]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y]\,(s^2 - s - 2) = \frac{18\cdot 3}{(s+1)^2 + 9} + 3 \Rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{54}{(s^2+2s+10)(s^2-s-2)} + \frac{3}{s^2-s-2}$$

$$\# \quad \frac{54}{(s^2+2s+10)(s-2)(s+1)} = \underbrace{\frac{A}{s-2}}_{(s^2+2s+10)(s+1)} + \underbrace{\frac{B}{s+1}}_{(s^2+2s+10)(s-2)} + \underbrace{\frac{Cs+D}{s^2+2s+10}}_{(s-2)(s+1)}$$

$$\Rightarrow 54 = A(s^2+2s+10)(s+1) + B(s^2+2s+10)(s-2) + (Cs+D)(s-2)(s+1)$$

$$B = -2\,, \qquad A = 1\,, \qquad C = 1\,, \qquad D = -2$$

$$\# \quad \frac{3}{(s-2)(s+1)} = \underbrace{\frac{E}{s-2}}_{(s+1)} + \underbrace{\frac{F}{s+1}}_{(s-2)} \Rightarrow 3 = E(s+1) + F(s-2) \Rightarrow E = 1\,,\ F = -1$$

$$\Rightarrow y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{54}{(s^2+2s+10)(s-2)(s+1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2-s-2}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{s^2+2s+10}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

$$= e^{2x} - 2e^{-x} + e^{2x} - e^{-x} + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1-3}{(s+1)^2+3^2}\right]$$

orj. s. 5

$$\Rightarrow y(x) = 2e^{2x} - 3e^{-x} + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = 2e^{2x} - 3e^{-x} + e^{-x}\cos 3x - e^{-x}\sin 3x}$$

Örnek 5

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = h(x) \\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0 \end{cases}, \qquad h(x) = \begin{cases} 2\,, & 0 < x < 4 \\ 0\,, & x > 4 \end{cases}$$

başlangıç-değer problemini Laplace dönüşümü uygulayarak çözünüz.

Çözüm: Öncelikle $h(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hesaplayalım.

$$\mathcal{L}[h(x)] = \int_0^\infty e^{-sx}h(x)\,dx = 2\int_0^4 e^{-sx}\,dx = -\frac{2}{s}e^{-sx}\Big|_0^4 = -\frac{2e^{-4s}}{s} + \frac{2}{s}$$

$$y'' - 3y' + 2y = h(x) \Rightarrow \mathcal{L}[y''] - 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[h(x)]$$

$$\Rightarrow s^2\mathcal{L}[y] - \cancel{sy(0)} - \cancel{y'(0)} - 3s\mathcal{L}[y] + \cancel{3y(0)} + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[h(x)]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y]\,(s^2 - 3s + 2) = \frac{2}{s}\left(1 - e^{-4s}\right) \Rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{2}{s(s-2)(s-1)}\left(1 - e^{-4s}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{2}{s(s-2)(s-1)} - \frac{2e^{-4s}}{s(s-2)(s-1)} \Rightarrow y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s-2)(s-1)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-4s}}{s(s-2)(s-1)}\right]$$

orj. s. 6

$$\# \quad \frac{2}{s(s-2)(s-1)} = \underbrace{\frac{A}{s}}_{(s-2)(s-1)} + \underbrace{\frac{B}{s-2}}_{s(s-1)} + \underbrace{\frac{C}{s-1}}_{s(s-2)}$$

$$\Rightarrow 2 = A(s-2)(s-1) + Bs(s-1) + Cs(s-2)$$

$$\Rightarrow A = 1, \qquad B = 1, \qquad C = -2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s-2)(s-1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]$$

$$= 1 + e^{2x} - 2e^{x}$$

$\#$ $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 4 \\ g(x-4) & x > 4 \end{cases}$ o.ü., $f(x) = u_4(x) \cdot g(x-a)$ olduğunu ve

bu sebepten $\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[u_4(x) \cdot g(x-a)] = e^{-4s}\mathcal{L}[g(x)]$ olduğunu biliyoruz.

O halde, $\mathcal{L}[g(x)] = \dfrac{2}{s(s-2)(s-1)}$ olur. Buradan, $g(x) = 1 + e^{2x} - 2e^{x}$ elde edilir.

$$\mathcal{L}[f(x)] = e^{-4s}\mathcal{L}[g(x)] \Rightarrow \mathcal{L}[f(x)] = e^{-4s} \cdot \frac{2}{s(s-2)(s-1)} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-4s}}{s(s-2)(s-1)}\right] = f(x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-4s}}{s(s-2)(s-1)}\right] = \begin{cases} 0, & 0 < x < 4 \\ 1 + e^{2(x-4)} - 2e^{x-4}, & x > 4 \end{cases} \quad \text{bulunur.}$$

Bu durumda,

$$y(x) = \begin{cases} 1 + e^{2x} - 2e^{x} & 0 < x < 4 \\ (1 - e^{-8})e^{2x} + 2\left(e^{-4} - 1\right)e^{x} & x > 4 \end{cases} \quad \text{elde edilir.}$$