Diferansiyel Denklemler

9. Hafta Uygulama – Cauchy-Euler denklemi ve mertebe indirgeme

Orijinal not: DIF-uygulama-9-hafta.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

8. HAFTA

Hatırlatma

* $a_0x^n y^{(n)} + a_1x^{k-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x)$[1] şeklinde değişken katsayılı denkleme "Cauchy-Euler denklemi" denir, burada $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sabitlerdir. Bu denklemi çözmek için $x > 0$ olduğunda $x = e^t$ ($x < 0$ olduğunda ise $x = -e^t$) dönüşümü yapmamız gerekiyor. Bu dönüşüm sayesinde, denklem sabit katsayılı bir denkleme dönüşür ki, bu denklemin de karakteristik denklemi

$$a_0k(k-1)\ldots(k-n+1) + a_1k(k-1)\ldots(k-n+2) + \cdots + a_{n-2}k(k-1) + a_{n-1}k + a_n = 0$$

olur. Bu denklemi elde etmenin basit yolu $y = x^k$ dönüşümü yapmaktır.

* Yüksek mertebeli değişken katsayılı denklemlerde bir diğer çözüm yöntemi mertebelerin indirgenmesi yöntemidir.

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

denklemi verilsin ve bu denklemin bir $y_1 = y_p(x)$ çözümü bilinsin. Bu durumda, "$y = u \cdot y_1$; $u = u(x)$" dönüşümüyle ve daha sonraki adımda $u' = v$ dönüşümüyle denklemin mertebesi düşer. Böylece $(n-1)$. mertebeden denklem elde edilir.

Alıştırmalar

Örnek 1

$x^2y'' + xy' + y = 4\sin(\ln x)$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Bu denklem bir Cauchy-Euler denklemidir. Bu durumda, $x > 0$ kabul edelim ve $x = e^t$ dönüşümü yapalım. Bu dönüşüm sayesinde elde edeceğimiz sabit katsayılı denklemin karakteristik denklemi,

$$r(r-1) + r + 1 = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0$$

elde edilir. O halde, $x = e^t$ ($t = \ln x$) dönüşümünden sonra elde edilen sabit katsayılı denklem

[1] Claude notu: muhtemelen $a_1x^{n-1}y^{(n-1)}$ olmalı.

$y_t'' + y_t = 4\sin t$ şeklinde olmalıdır. Şimdi, bu denklemin çözümünü bulalım.

$$y_t'' + y_t = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = i,\ r_2 = -i \Rightarrow \boxed{y_h(t) = c_1\cos t + c_2\sin t \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

orj. s. 2

$$\left.\begin{aligned} y_p(t) &= t\,(A\cos t + B\sin t) \\ y_p'(t) &= A\cos t + B\sin t + t\,(-A\sin t + B\cos t) \\ y_p''(t) &= -A\sin t + B\cos t - A\sin t + B\cos t + t\,(-A\cos t - B\sin t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Denklemde yerine yazalım}$$

$$-2A\sin t + 2B\cos t = 4\sin t \Rightarrow B = 0,\ A = -2$$

O halde, özel çözüm $y_p(t) = -2t\cos t$ bulunur. Bu durumda genel çözüm

$$y(t) = c_1\cos t + c_2\sin t - 2t\cos t$$

olacağından $t = \ln x$ dönüşümü yapılarak

$$\boxed{y(x) = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x) - 2\ln x\cos(\ln x) \quad ;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

bulunur.

Örnek 2

$x^2y'' - 4xy' + 4y = 4x^2 - 6x^3$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Bu denklem bir Cauchy-Euler denklemidir. Bu durumda, $x > 0$ kabul edelim ve $x = e^t$ dönüşümü yapalım. Bu dönüşüm sayesinde elde edeceğimiz sabit katsayılı denklemin karakteristik denklemi,

$$r(r-1) - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r^2 - 5r + 4 = 0$$

elde edilir. O halde, $x = e^t$ $(t = \ln x)$ dönüşümünden sonra elde edilen sabit katsayılı denklem $y_t'' - 5y_t' + 4y_t = 4e^{2t} - 6e^{3t}$ şeklinde olmalıdır. Şimdi, bu denklemin çözümünü bulalım.

$$y_t'' - 5y_t' + 4y_t = 0 \Rightarrow r^2 - 5r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 4,\ r_2 = 1 \Rightarrow \boxed{y_h(t) = c_1e^{4t} + c_2e^t\ ;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

$$\left.\begin{aligned} y_p(t) &= Ae^{2t} + Be^{3t} \\ y_p'(t) &= 2Ae^{2t} + 3Be^{3t} \\ y_p''(t) &= 4Ae^{2t} + 9Be^{3t} \end{aligned}\right\} \text{ Denklemde yerine yazarsak}$$

orj. s. 3

$$4Ae^{2t} + 9Be^{3t} - 10Ae^{2t} - 15Be^{3t} + 4Ae^{2t} + 4Be^{3t} = 4e^{2t} - 6e^{3t}$$

$$\Rightarrow -2Ae^{2t} - 2Be^{3t} = 4e^{2t} - 6e^{3t} \Rightarrow A = -2,\ B = 3$$

$$\Rightarrow y_p(t) = -2e^{2t} + 3e^{3t}$$

Bu durumda, genel çözüm

$$y(t) = c_1e^{4t} + c_2e^t - 2e^{2t} + 3e^{3t}$$

olacağından $t = \ln x$ dönüşümü yapılarak

$$\boxed{y(x) = c_1x^4 + c_2x - 2x^2 + 3x^3 \quad ;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

bulunur.

Örnek 3

$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ denkleminin $y = x$ verilmiş bir çözümü olsun. Genel çözümü bulunuz.

Çözüm: $y = u \cdot x$; $u = u(x)$ dönüşümü yapalım

$$y = ux \Rightarrow y' = xu' + u \Rightarrow y'' = u' + xu'' + u' = xu'' + 2u'$$

Denklemde yerine yazarsak,

$$x^2(xu'' + 2u') - 4x(xu' + u) + 4ux = 0 \Rightarrow x^3u'' + 2x^2u' - 4x^2u' - 4xu + 4ux = 0$$

$$\Rightarrow u''x^3 - 2x^2u' = 0$$

Şimdi; $u' = v$ dönüşümü yapalım.

$$v'x^3 - 2x^2v = 0 \Rightarrow v' - \frac{2}{x}v = 0 \rightarrow \text{Bu bir lineer denklemdir. } a(x) = -\frac{2}{x}$$

o.ü. integrasyon çarpanı hesaplanır.

integrasyon çarpanı $\Rightarrow I(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$

orj. s. 4

Lineer denklemin her tarafını $\frac{1}{x^2}$ ile çarparsak,

$$\underbrace{\frac{1}{x^2}v' - \frac{2}{x^3}v}_{} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2}\cdot v\right)' = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2}v = c \Rightarrow v = c_1x^2 \ ; \ c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\underset{v=u'}{\Rightarrow} u' = c_1x^2 \Rightarrow u = c_1\int x^2\,dx \Rightarrow u(x) = c_1\frac{x^3}{3} + c_2 \ ; \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\underset{u=\frac{y}{x}}{\Rightarrow} \frac{y}{x} = c_1\frac{x^3}{3} + c_2 \Rightarrow y(x) = \underbrace{c_1\frac{x^4}{3}}_{c_3} + c_2x \Rightarrow \boxed{y(x) = c_2x + c_3x^4 \ ; \ c_2, c_3 \in \mathbb{R}}$$

elde edilir.

Örnek 4

$(2x+1)\frac{d^2y}{dx^2} - 4(x+1)\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ denkleminin $y = e^{2x}$ verilmiş bir çözümü olsun. Mertebe düşürerek genel çözümü bulunuz.

Çözüm: $y = ux^a$; $u = u(x)$ dönüşümü yapalım.

$$y = ue^{2x} \Rightarrow y' = u'e^{2x} + 2e^{2x}u \Rightarrow y'' = u''e^{2x} + 2e^{2x}u' + 4e^{2x}u + 2e^{2x}u'$$

Denklemde yerine yazarsak,

$$e^{2x}(2x+1)(u'' + 4u' + 4u) - 4(x+1)e^{2x}(u' + 2u) + 4ue^{2x} = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)(u'' + 4u' + 4u) - 4(x+1)(u' + 2u) + 4u = 0$$

$$\Rightarrow 2xu'' + 8xu' + 8xu + u'' + 4u' + 4u - 4xu' - 8xu - 4u' - 8u + 4u = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)u'' + 4xu' = 0$$

Şimdi, $u' = v$ dönüşümü yapalım.

$$(2x+1)v' + 4xv = 0 \Rightarrow v' + \frac{4x}{2x+1}v = 0 \rightarrow \text{Lineer denklem ve } a(x) = \frac{4x}{2x+1}$$

integrasyon çarpanı

$$\Rightarrow I(x) = e^{2\int \frac{2x\,dx}{2x+1}} \underset{\substack{\downarrow \\ 2x+1=t \\ 2dx=dt}}{=} e^{\int \frac{t-1}{t}dt} = e^{t-\ln t} = \frac{e^t}{t} = e^{2x+1}(2x+1)^{-1}$$

orj. s. 5

Lineer denklemin her tarafını $e^{2x+1}(2x+1)^{-1}$ ile çarpalım

$$\underbrace{e^{2x+1}v' + 4xe^{2x+1}(2x+1)^{-1}v}_{2} = 0 \Rightarrow \left(e^{2x+1}(2x+1)^{-1}v\right)' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{e^{2x+1}}{2x+1}v = c \Rightarrow v = \frac{c(2x+1)}{e^{2x+1}}$$

$$\underset{v=u'}{\Rightarrow} u' = \frac{c(2x+1)}{e^{2x+1}} \Rightarrow u(x) = c\int \frac{2x+1}{e^{2x+1}}dx \overset{\text{(Kısmi integrasyon)}}{\Rightarrow} u(x) = c_1e^{-(2x+1)}(x+1) + c_2$$

$$\underset{u=\frac{y}{e^{2x}}}{\Rightarrow} \frac{y}{e^{2x}} = \overbrace{\frac{c_1}{e}}^{c_3}\frac{(x+1)}{e^{2x}} + c_2 \Rightarrow \boxed{y(x) = c_2e^{2x} + c_3(x+1)\,;\ c_2, c_3 \in \mathbb{R}}$$

bulunur.

[a] Claude notu: muhtemelen $y = ue^{2x}$ olmalı (sonraki satırda öyle kullanılmış).
[a] Claude notu: muhtemelen ilk terim $e^{2x+1}(2x+1)^{-1}v'$ olmalı.