Diferansiyel Denklemler

13. Hafta Uygulama – Diferansiyel denklem sistemleri

Orijinal not: dif14.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

Hatırlatma

* Serbest değişken, $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, . . . , $y_n = y_n(x)$ aranan fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki şekilde homojen diferansiyel denklem sistemini inceleyelim.

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Bu denklem sistemini çözmek için,

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $(A - \lambda I)\alpha = 0$ denkleminin özdeğer ve özvektörleri bulunur. Karakteristik denklem olan $\Delta(\lambda)$ dan bulunan λ_i ler reel sayı ve birbirinden farklı ise temel çözüm

$$\left.\begin{aligned} y_{1,k}(x) &= \alpha_{1,k}\, e^{\lambda_k x} \\ y_{2,k}(x) &= \alpha_{2,k}\, e^{\lambda_k x} \\ &\vdots \\ y_{n,k}(x) &= \alpha_{n,k}\, e^{\lambda_k x} \end{aligned}\right\} \text{ şeklindedir}$$

Eğer $\lambda = a + ib$ kompleks kök ise

$$y(t) = \underbrace{\left(\alpha_1 e^{at}\cos bt - \alpha_2 e^{at}\sin bt\right)}_{y_1(t)} + i\,\underbrace{\left(\alpha_1 e^{at}\sin bt + \alpha_2 e^{at}\cos bt\right)}_{y_2(t)}$$

olmak üzere temel çözümler $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ dir

Genel çözüm, temel çözümlerin lineer kombinasyonudur.

orj. s. 2

Alıştırmalar

Örnek 1

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 2y & x = x(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y & y = y(t) \end{cases}$$

sistemini çözünüz.

Çözüm: Öncelikle $\Delta(\lambda)$ determinantından özdeğer ve özvektörleri bulalım.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)(-1-\lambda) + 8 = 0 \Rightarrow -5 - 5\lambda + \lambda + \lambda^2 + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3 \text{ ve } \lambda_2 = 1 \rightarrow \text{özdeğerler}$$

$$\# \quad \lambda_1 = 3 \text{ için } \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\alpha - 2\beta = 0 \\ 4\alpha - 4\beta = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{özvektör}} \alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$\# \quad \lambda_2 = 1 \text{ için } \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 4\alpha - 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{özvektör}} \alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{t} \quad 1$$

orj. s. 3

Bu durumda, genel çözüm

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{t}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{3t} + c_2 e^{t} \\ y(t) &= c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{t} \end{aligned} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

bulunur.

Claude notu: muhtemelen $x_2(t)$, $y_2(t)$ olmalı.

Örnek 2

$$\begin{cases} x' = x + z - y & x = x(t) \\ y' = x + y - z & y = y(t) \\ z' = 2x - y & z = z(t) \end{cases}$$

sistemini çözünüz.

Çözüm: Öncelikle $\Delta(\lambda)$ determinantından özdeğer ve özvektörleri bulalım.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -(1-\lambda)^2\lambda - (1-\lambda) - \lambda + 2 - 1 - 2(1-\lambda) = 0 \Rightarrow -\lambda(1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = 2\,,\ \lambda_3 = -1}_{\text{özdeğerler}}$$

orj. s. 4

$$\#\ \ \lambda_1 = 1 \text{ için } \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} -\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{özvektör}}\alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^t$$

$$\#\ \ \lambda_2 = 2 \text{ için } \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} -\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = 0\,,\quad \alpha = \gamma$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{özvektör}}\alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2t}$$

$$\#\ \ \lambda_3 = -1 \text{ için } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = -3\alpha\,,\quad \gamma = -5\alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}}_{\text{özvektör}}\alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}e^{-t}$$

orj. s. 5

Bu durumda, genel çözüm

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^t + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2t} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}e^{-t}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{-t} \\ y(t) &= c_1e^t - 3ce^{-t}\ ^2 \\ z(t) &= c_1e^t + c_2e^{2t} - 5c_3e^{-t} \end{aligned} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

bulunur.

Claude notu: muhtemelen $-3c_3e^{-t}$ olmalı.

Örnek 3

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y & x = x(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y & y = y(t) \end{cases}$$

sistemini çözünüz.

Çözüm: Öncelikle $\Delta(\lambda)$ determinantından özdeğer ve özvektörleri bulalım.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2 = -4 \Rightarrow \lambda - 1 = \pm 2i$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \pm 2i \rightarrow \text{özdeğerler}$$

$$\#\quad \lambda = 1 + 2i \text{ için } \begin{bmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2i\alpha - 4\beta = 0 \\ \alpha - 2i\beta = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 2i\beta \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \end{bmatrix} \beta = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}_{\text{özvektör}} \beta$$

orj. s. 6

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \underbrace{e^{(1+2i)t}}_{e^t(\cos 2t + i \sin 2t)}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \cos 2t - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} e^t \sin 2t \right)}_{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix}} + i \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \sin 2t + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} e^t \cos 2t \right)}_{\begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}}$$

Bu durumda, genel çözüm

$$x(t) = -2c_1 e^t \sin 2t + 2c_2 e^t \cos 2t \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t$$

bulunur.

Örnek 4

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y & x = x(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases}$$

sistemini çözünüz.

Çözüm: Öncelikle $\Delta(\lambda)$ determinantından özdeğer ve özvektörleri bulalım.

$$\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)(2-\lambda) + 10 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 3)^2 = -9 \Rightarrow \lambda - 3 = \pm 3i \Rightarrow \underbrace{\lambda = 3 \mp 3i}_{\text{özdeğerler}}$$

Claude ile dijitalleştirildi · hata içerebilir / Digitised with Claude · may contain errors

orj. s. 7

$$\#\ \ \lambda = 3+3i \text{ için } \begin{bmatrix} 1-3i & -2 \\ 5 & -1-3i \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix}(1-3i)\alpha - 2\beta = 0\\ 5\alpha - (1+3i)\beta = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1-3i}{2}\alpha \Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\end{bmatrix}\alpha = \left(\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -\frac{3}{2}\end{bmatrix} i\right)\alpha$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -3\end{bmatrix} i\right) \rightarrow \text{özvektör}$$

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -3\end{bmatrix} i\right) \underbrace{e^{(3+3i)t}}_{e^{3t}(\cos 3t + i\sin 3t)}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} e^{3t}\cos 3t - \begin{bmatrix}0\\ -3\end{bmatrix} e^{3t}\sin 3t}_{\begin{bmatrix}x_1(t)\\ y_1(t)\end{bmatrix}} + i\underbrace{\left(\begin{bmatrix}0\\ -3\end{bmatrix} e^{3t}\cos 3t + \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} e^{3t}\sin 3t\right)}_{\begin{bmatrix}x_2(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}}$$

Bu durumda, genel çözüm

$$x(t) = 2c_1 e^{3t}\cos 3t + 2c_2 e^{3t}\sin 3t$$
$$y(t) = c_1 e^{3t}\cos 3t + 3c_1 e^{3t}\sin 3t - 3c_2 e^{3t}\cos 3t + c_2 e^{3t}\sin 3t$$

bulunur.

orj. s. 8

Örnek (ÖDEV)

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt} = x + 2y & x = x(t)\\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y & y = y(t)\end{cases}$$

sistemini çözünüz.

Cvp: $x(t) = 2c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}$, $y(t) = 3c_1 e^{4t} - c_2 e^{-t}$

Örnek (ÖDEV)

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt} = 3x - 2y & x = x(t)\\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y & y = y(t)\end{cases}$$

sistemini çözünüz.

Cvp: $x(t) = e^{3t}(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t)$, $y(t) = e^{3t}(c_1\sin 2t - c_2\cos 2t)$

Claude ile dijitalleştirildi · hata içerebilir / Digitised with Claude · may contain errors