Diferansiyel Denklemler

14. Hafta Uygulama – Katlı özdeğerler ve sistemler

Orijinal not: dif15.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

Hatırlatma

* Bu bölümde λ özdeğerlerinin katlı olduğu durumu inceleyeceğiz. λ_0 nın $\Delta(\lambda)$ karakteristik denklemindeki kök sayısına "cebirsel katı" denir. $\text{rank}\,(\Delta(\lambda_0)) = r$ ve cebirsel katına p dersek $n - r$ sayısına "geometrik katı" denir. Her zaman $n - r \leq p$ dir.
* $n - r = p$ olduğu durumda λ_0 özdeğerine $n - r$ sayıda lineer bağımsız özvektör karşılık gelir.
* $n - r < p$ olduğu durumda defekt $m = p - (n - r)$ olur ve λ_0 özdeğerine karşılık gelen genel çözüm

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \\ \vdots \\ \alpha_{n,2} \end{bmatrix} x + \cdots + \begin{bmatrix} \alpha_{1,m+1} \\ \alpha_{2,m+1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,m+1} \end{bmatrix} x^m \right) e^{\lambda_0 x}$$

şeklindedir.
* Homojen olmayan lineer diferansiyel denklem sistemlerini sabitlerin varyasyonu yöntemi ile çözebiliriz.

Alıştırmalar

Örnek 1

$$\begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = x + 3y - z \\ z' = 3x + 3y - z \end{cases}$$

sistemini çözünüz.

orj. s. 2

Çözüm: Öncelikle $\Delta(\lambda)$ determinantından özdeğer ve özvektörleri bulalım.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 3 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)\left[-(3-\lambda)(1+\lambda)+3\right] - \left[-(1+\lambda)+3\right] - \left[3-3(3-\lambda)\right]$$

$$\Rightarrow (3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda)+\lambda-2-(3\lambda-6) = (3-\lambda)\lambda(\lambda-2)+\lambda-2-3(\lambda-2) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)\left[-\lambda^2+3\lambda+1-3\right] = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(1-\lambda)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda_1 = 1\,,\ \lambda_{2,3} = 2}_{\text{özdeğerler}}$$

$$\#\quad \lambda_1 = 1 \text{ için } : \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\alpha+\beta-\gamma = 0 \\ \alpha+2\beta-\gamma = 0 \\ 3\alpha+3\beta-2\gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \gamma = 3\alpha \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\text{özvektör}} \alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^t$$

$\#\ \lambda_{2,3} = 2$ katlı kök olduğu için matrisin rankına bakmalıyız.

cebirsel kat = $p = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank} = \underbrace{1}_{=r} \Rightarrow \text{geometrik kat} = n-r = 3-1 = 2$$

Bu durumda, $n-r = p$ old.dan defekt yoktur ve $\lambda = 2$ özdeğerine karşılık gelen 2 lineer bağımsız özvektör vardır.

orj. s. 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha+\beta-\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \alpha+\beta \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \beta}_{\text{özvektörler}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Bu durumda, genel çözüm,

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1e^t + c_2e^{2t} \\ y(t) &= c_1e^t + c_3e^{2t} \\ z(t) &= 3c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{2t} \end{aligned} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

bulunur.

Örnek 2

$$\begin{cases} x' = 4x + 3y + z \\ y' = -4x - 4y - 2z \\ z' = 8x + 12y + 6z \end{cases}$$

sistemini çözünüz.

Çözüm: Öncelikle $\Delta(\lambda)$ determinantından özdeğer ve özvektörleri bulalım.

orj. s. 4

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 1 \\ -4 & -4-\lambda & -2 \\ 8 & 12 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)\left[-(4+\lambda)(6-\lambda)+24\right] - 3\left[-4(6-\lambda)+16\right] - 48 + 8(4+\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (4-\lambda)\lambda(\lambda-2) - 12(\lambda-2) + 8(\lambda-2) = 0 \Rightarrow (\lambda-2)\left(-\lambda^2 + 4\lambda - 4\right) = -(\lambda-2)(\lambda-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda_{1,2,3} = 2}_{} \rightarrow \text{özdeğer}$$

\# $\lambda_{1,2,3} = 2$ katlı kök olduğu için matrisin rankına bakmalıyız.

cebirsel kat = $p = 3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -6 & -2 \\ 8 & 12 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank} = r = 1 \Rightarrow \text{geometrik kat} = n - r = 2$$

Bu durumda, $n - r < p$ old.dan defekt vardır. $m = p - (n - r) = 3 - 2 = 1$ old.dan

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} t \right) e^{2t}$$

şeklinde olur. Şimdi denklemde yerine yazalım.

$$\left.\begin{aligned} x(t) = (a+dt)e^{2t} &\Rightarrow x'(t) = d\,e^{2t} + 2(a+dt)e^{2t} \\ y(t) = (b+et)e^{2t} &\Rightarrow y'(t) = e\,e^{2t} + 2(b+et)e^{2t} \\ z(t) = (c+ft)e^{2t} &\Rightarrow z'(t) = f\,e^{2t} + 2(c+ft)e^{2t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} d\,e^{2t} + 2(a+dt)e^{2t} &= 4(a+dt)e^{2t} + 3(b+et)e^{2t} + (c+ft)e^{2t} \\ e\,e^{2t} + 2(b+et)e^{2t} &= -4(a+dt)e^{2t} - 4(b+et)e^{2t} - 2(c+ft)e^{2t} \\ f\,e^{2t} + 2(c+ft)e^{2t} &= 8(a+dt)e^{2t} + 12(b+et)e^{2t} + 6(c+ft)e^{2t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

orj. s. 5

Şimdi her tarafı e^{2t} ye bölelim.

$$\left.\begin{aligned} d + 2(a+dt) &= 4(a+dt) + 3(b+et) + (c+ft) \\ e + 2(b+et) &= -4(a+dt) - 4(b+et) - 2(c+ft) \\ f + 2(c+ft) &= 8(a+dt) + 12(b+et) + 6(c+ft) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} d + 2a = 4a + 3b + c &\Rightarrow d = 2a + 3b + c \\ e + 2b = -4a - 4b - 2c &\Rightarrow e = -4a - 6b - 2c \\ f + 2c = 8a + 12b + 6c &\Rightarrow f = 8a + 12b + 4c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} e &= -2d \\ f &= 4d \\ d &= 2a + 3b + c \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a = c_1 \\ b = c_2 \\ d = c_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} c = c_3 - 2c_1 - 3c_2 \\ e = -2c_3 \\ f = 4c_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 - 2c_1 - 3c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 \\ -2c_3 \\ 4c_3 \end{bmatrix} t \right) e^{2t}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} c_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} c_3 t \right) e^{2t}$$

Bu durumda, genel çözüm,

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_3 t e^{2t} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = c_2 e^{2t} - 2c_3 t e^{2t}$$
$$z(t) = -2c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{2t} + c_3 e^{2t} + 4c_3 t e^{2t}$$

bulunur.

orj. s. 6

Örnek 3

$$\begin{cases} x' = 6x - 3y + e^{5t} & x(0) = 9 \\ y' = 2x + y + 4 & y(0) = 4 \end{cases}$$

sistemini çözünüz.

Çözüm: Öncelikle homojen sistemin çözümünü bulalım.

Homojen sistem :

$$\left.\begin{matrix} x' = 6x - 3y \\ y' = 2x + y \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (6-\lambda)(1-\lambda) + 6 = 0 \Rightarrow 6 - 7\lambda + \lambda^2 + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4\,,\ \lambda_2 = 3 \ \rightarrow \text{özdeğerler}$$

$$\#\ \ \lambda_1 = 4 \ \text{için} \ \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2\alpha - 3\beta = 0 \Rightarrow 2\alpha = 3\beta$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{2\alpha}{3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{özvektör}} \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t}$$

$$\#\ \ \lambda_2 = 3 \ \text{için} \ \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 3\alpha - 3\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

orj. s. 7

Bu durumda, homojen sistemin genel çözümü,

$$x(t) = 3c_1 e^{4t} + c_2 e^{3t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = 2c_1 e^{4t} + c_2 e^{3t}$$

bulunur. Şimdi, sabitlerin varyasyonu yöntemini kullanalım.

$$x(t) = 3c_1(t)e^{4t} + c_2(t)e^{3t} \Rightarrow 3c_1'(t)e^{4t} + 12c_1(t)e^{4t} + c_2'(t)e^{3t} + 3c_2(t)e^{3t}$$

$$y(t) = 2c_1(t)e^{4t} + c_2(t)e^{3t} \Rightarrow 2c_1'(t)e^{4t} + 8c_1(t)e^{4t} + c_2'(t)e^{3t} + 3c_2(t)e^{3t}$$

Denklemde yerine yazalım.

$$\left.\begin{aligned} 3c_1'(t)e^{4t} + \cancel{12c_1(t)e^{4t}} + c_2'(t)e^{3t} + \cancel{3c_2(t)e^{3t}} &= \cancel{18c_1(t)e^{4t}} + \cancel{6c_2(t)e^{3t}} - \cancel{6c_1(t)e^{4t}} - \cancel{3c_2(t)e^{3t}} + e^{5t} \\ 2c_1'(t)e^{4t} + \cancel{8c_1(t)e^{4t}} + c_2'(t)e^{3t} + \cancel{3c_2(t)e^{3t}} &= \cancel{6c_1(t)e^{4t}} + \cancel{2c_2(t)e^{3t}} + \cancel{2c_1(t)e^{4t}} + \cancel{c_2(t)e^{3t}} + 4 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 3c_1'(t)e^{4t} + c_2'(t)e^{3t} &= e^{5t} \\ 2c_1'(t)e^{4t} + c_2'(t)e^{3t} &= 4 \end{aligned}\right\}$$ Gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$\Rightarrow c_1'(t)e^{4t} = e^{5t} - 4 \Rightarrow c_1'(t) = e^{t} - 4e^{-4t} \Rightarrow c_1(t) = e^{t} + e^{-4t} + c_1\,, \quad c_1 : \text{sabit}$$

$$\Rightarrow c_2'(t)e^{3t} = 12 - 2e^{5t} \Rightarrow c_2'(t) = 12e^{-3t} - 2e^{2t} \Rightarrow c_2(t) = -4e^{-3t} - e^{2t} + c_2\,, \quad c_2 : \text{sabit}$$

Bu durumda, genel çözüm

$$x(t) = 3\left(e^{t} + e^{-4t} + c_1\right)e^{4t} + \left(-4e^{-3t} - e^{2t} + c_2\right)e^{3t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = 2\left(e^{t} + e^{-4t} + c_1\right)e^{4t} + \left(-4e^{-3t} - e^{2t} + c_2\right)e^{3t}$$

bulunur.

orj. s. 8

Şimdi, $x(0) = 9$ ve $y(0) = 4$ koşulunu sağlayan çözümü bulalım:

$$\left.\begin{aligned} x(0) = 9 \Rightarrow 3(2 + c_1) - 5 + c_2 = 9 \Rightarrow 3c_1 + c_2 = 8 \\ y(0) = 4 \Rightarrow 2(2 + c_1) - 5 + c_2 = 4 \Rightarrow 2c_1 + c_2 = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 3 \\ c_2 &= -1 \end{aligned}$$

Bu durumda, özel çözüm

$$x(t) = 2e^{5t} + 9e^{4t} - e^{3t} - 1$$
$$y(t) = e^{5t} + 6e^{4t} - e^{3t} - 2$$

elde edilir.

Örnek (ÖDEV 1)

$$\begin{cases} x' = 6x - 3y + e^{2t} \\ y' = 2x + y - e^{2t} \end{cases}$$

sistemini çözünüz.

Örnek (ÖDEV 2)

$$\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + 3y - 4z \\ z' = 4x + y - 4z \end{cases}$$

sistemini çözünüz.

Örnek (ÖDEV 3)

$$\begin{cases} x' = -5x - 3y - 3z \\ y' = 8x + 5y + 7z \\ z' = -2x - y - 3z \end{cases}$$

sistemini çözünüz.