Diferansiyel Denklemler

2. Hafta Uygulama (3. ders) – Lineer, Bernoulli ve Riccati denklemleri

Orijinal not: difdenk-3.ders-2.hafta.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

Hatırlatma

* Lineer Denklemler: $y' + a(x)y = b(x)$ şeklindeki denklem "1. mertebeden lineer denklem" olarak adlandırılır. İntegrasyon çarpanı yöntemi ile rahat bir şekilde çözülebilir. Verilen lineer denklem için,
$$I(x) = e^{\int a(x)\,dx}$$
fonksiyonuna integrasyon çarpanı denir. Denklemin her tarafını $I(x)$ ile çarparak diferansiyel denklem çözülür.
* Berneulli Denklemi: $y' + a(x)y = b(x)y^n$, $n \neq 0,1$; $n \in \mathbb{R}$ şeklindeki denkleme "Berneulli denklemi" denir. Öncelikle, her tarafı y^{-n} ile çarparak, daha sonra $z = y^{1-n}$ dönüşümü yaparak denklemi lineer denklem formuna dönüştürürüz.
* Riccati Denklemi: $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$ şeklindeki denkleme "Riccati denklemi" denir. Denklemin bir özel çözümü $y_1(x)$ biliniyorsa, $y = y_1(x) + z$; $z = z(x)$ dönüşümü ile denklem Berneulli denklemine indirgeniyor.

Alıştırmalar

Örnek 1

$y' + 2xy = x^3$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $a(x) = 2x$ ve $b(x) = x^3$ olmak üzere bu bir lineer denklemdir. Öncelikle integrasyon çarpanını bulmalıyız.
$$I(x) = e^{\int 2x\,dx} = e^{2\int x\,dx} = e^{x^2}$$
Şimdi, her tarafı e^{x^2} ile çarpalım.
$$\underbrace{e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y}_{} = e^{x^2}x^3 \Rightarrow \left(e^{x^2}\cdot y\right)' = e^{x^2}x^3 \Rightarrow e^{x^2}y = \int e^{x^2}x^3\,dx$$
$$\underset{\substack{x^2=t\\ 2x\,dx=dt}}{\Rightarrow} e^{x^2}y = \frac{1}{2}\int te^t\,dt$$

$$\Rightarrow \quad 2e^{x^2}y = te^t - \int e^t\,dt \Rightarrow 2e^{x^2}y = x^2e^{x^2} - e^{x^2} + c$$

kısmi integrasyon
$t=u \Rightarrow dt=du$
$e^t dt=dv \Rightarrow v=e^t$

$$\boxed{y = \frac{x^2-1}{2} + ce^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R}}$$

Örnek 2

orj. s. 2

$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2$, $y(0) = 2$ başlangıç-değer problemini çözünüz.

Çözüm: $a(x) = 3x^2$ ve $b(x) = x^2$ olmak üzere bu bir lineer denklemdir. Öncelikle integrasyon çarpanını bulmalıyız.

$$I(x) = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$$

Şimdi, her tarafı e^{x^3} ile çarpalım.

$$\underbrace{e^{x^3}y' + 3x^2e^{x^3}y}_{} = e^{x^3}x^2 \Rightarrow \left(e^{x^3}\cdot y\right)' = e^{x^3}\cdot x^2 \Rightarrow e^{x^3}y = \int e^{x^3}x^2\,dx$$

$$\Rightarrow \quad e^{x^3}y = \frac{1}{3}\int e^t\,dt \Rightarrow e^{x^3}y = \frac{1}{3}e^{x^3} + c \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}, \quad c \in \mathbb{R}}$$

$x^3=t$
$3x^2dx=dt$

Şimdi, $y(0) = 2$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü bulalım.

$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{3} + c \Rightarrow c = \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}e^{-x^3}}$$

Örnek 3

$e^x\left(y - 3(e^x+1)^2\right)dx + (e^x+1)\,dy = 0$, $y(0) = 4$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm:

$$e^x\left(y - 3(e^x+1)^2\right) + (e^x+1)y' = 0 \Rightarrow \frac{e^x}{e^x+1}y - 3e^x(e^x+1) + y' = 0$$

$$\rightarrow y' + \frac{e^x}{e^x+1}y = 3e^x(e^x+1)$$

$a(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ ve $b(x) = 3e^x(e^x+1)$ olmak üzere bu bir lineer denklemdir.

Öncelikle integrasyon çarpanını bulmalıyız.

$$I(x) = e^{\int \frac{e^x}{e^x+1}dx} = e^{\ln(e^x+1)} = e^x + 1$$

orj. s. 3

Şimdi, her tarafı $e^x + 1$ ile çarpalım.

$$\underbrace{(e^x+1)\cdot y' + e^xy}_{} = (e^x+1)^2\,3e^x \Rightarrow \left((e^x+1)y\right)' = 3e^x(e^x+1)^2$$

$$\Rightarrow (e^x+1)y = 3\int e^x(e^x+1)^2\,dx \quad = \quad (e^x+1)y = \frac{(e^x+1)^3}{3}\cdot 3 + c$$

$e^x+1=u$
$e^xdx=du$

$$\Rightarrow \boxed{y = (e^x+1)^2 + c\,(e^x+1)^{-1}, \quad c \in \mathbb{R}}$$

Şimdi, $y(0) = 4$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü bulalım.

$$y(0) = 4 \Rightarrow 4 = (1+1)^2 + c\,(1+1)^{-1} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \boxed{y = (e^x + 1)^2} \;/\!/$$

Örnek 4

$\frac{dr}{d\theta} + r\tan\theta = \cos^2\theta$, $r\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ başlangıç-değer problemini çözünüz. **(ÖDEV)**

Çözüm: $a(\theta) = \tan\theta$ ve $b(\theta) = \cos^2\theta$ olmak üzere bu bir lineer denklemdir. Öncelikle integrasyon çarpanını bulmalıyız.

$$I(\theta) = e^{\int \tan\theta\, d\theta} = e^{-\ln\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$$

Şimdi, her tarafı $\frac{1}{\cos\theta}$ ile çarpalım.

$$\underbrace{\frac{1}{\cos\theta}\cdot r' + \frac{1}{\cos\theta} r\tan\theta}_{} = \cos\theta \Rightarrow \left(\frac{1}{\cos\theta}\cdot r\right)' = \cos\theta \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta}\cdot r = \int \cos\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta}\cdot r = \sin\theta + c \Rightarrow \boxed{r = \sin\theta\cos\theta + c\cos\theta} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$r\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + c\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = \sin\theta\cos\theta + \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{2r = \sin 2\theta + \sqrt{2}\cos\theta} \;/\!/$$

Örnek 5

orj. s. 4

$(\cos^2 x - y\cos x)\,dx - (1+\sin x)\,dy = 0$ denklemini çözünüz. **(ÖDEV)**

İpucu: $a(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}$, $I(x) = 1 + \sin x$ Cvp: $\boxed{2(1+\sin x)y = \sin x\cos x + x + c}$

Örnek 6

$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3}$, $y(1) = 2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: $y' + \frac{1}{2x}y = xy^{-3}$ → Berneulli Denklemi

Her tarafı y^3 ile çarpalım:

$$y^3y' + \frac{1}{2x}y^4 = x$$

Şimdi, $y^4 = z$ dönüşümü yapalım. $y^4 = z \Rightarrow 4y^3y' = z'$

$$\frac{z'}{4} + \frac{1}{2x}z = x \Rightarrow z' + \frac{2}{x}z = 4x$$

$a(x) = \frac{2}{x}$ ve $b(x) = 4x$ olmak üzere bu bir lineer denklemdir. Öncelikle integrasyon çarpanını bulalım.

$$I(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$$

Her tarafı x^2 ile çarpalım

$$\underbrace{x^2z' + 2xz}_{} = 4x^3 \Rightarrow \left(x^2z\right)' = 4x^3 \Rightarrow x^2z = \int 4x^3\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 z = x^4 + c \Rightarrow \boxed{z = x^2 + cx^{-2},\ c \in \mathbb{R}} \Rightarrow \boxed{y^4 = x^2 + cx^{-2},\ c \in \mathbb{R}}$$

Şimdi, $y(1) = 2$ koşulunu sağlayan çözümü bulalım.

$$y(1) = 2 \Rightarrow 16 = 1 + c \Rightarrow c = 15 \Rightarrow \boxed{y^4 = x^2 + 15x^{-2}} \ //$$

Örnek 7

orj. s. 5

$y' + xy = xy^2$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Bu bir Berneulli denklemidir. Öncelikle her tarafı y^{-2} ile çarpalım.

$$y^{-2}y' + xy^{-1} = x$$

Şimdi, $z = y^{-1}$ dönüşümü yapalım. $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y'y^{-2}$

$$-z' + xz = x \Rightarrow z' - xz = -x$$

$a(x) = -x$ ve $b(x) = -x$ olmak üzere bu bir lineer denklemdir. Öncelikle integrasyon çarpanını bulalım.

$$I(x) = e^{-\int x\,dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Şimdi, her tarafı $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ile çarpalım.

$$\underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}z' - e^{-\frac{x^2}{2}}xz}_{} = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot z\right)' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}z = \int -xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \underset{-\frac{x^2}{2}=u \Rightarrow -x\,dx=du}{\Rightarrow} e^{-\frac{x^2}{2}}z = e^{-\frac{x^2}{2}} + c \Rightarrow \boxed{z = 1 + ce^{\frac{x^2}{2}}} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{y} = 1 + ce^{\frac{x^2}{2}} \quad c \in \mathbb{R}} \quad \text{ve} \quad \boxed{y = 0}$$

Örnek 8

$x^2\dfrac{dy}{dx} + xy = \dfrac{y^3}{x}$, $y(1) = 1$ başlangıç değer problemini çözünüz. **(ÖDEV)** Cvp: $\boxed{y^2 = x^2}$

Örnek 9

$\dfrac{dy}{dx} + y^2 - y = 2$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1(x) = 2$ olduğu biliniyor.
Diferansiyel denklemi çözünüz.

orj. s. 6

Çözüm: Bu bir Riccati denklemidir ve $y = 2 + z$ dönüşümü yapılır.

$$y = 2 + z \Rightarrow y' = z'$$

$$\Rightarrow z' + (2 + z)^2 - (2 + z) = 2 \Rightarrow z' + 4 + 4z + z^2 - 2 - z = 2$$

$$\Rightarrow z' + z^2 + 3z = 0 \Rightarrow z' + 3z = -z^2$$

Her tarafı z^{-2} ile çarpalım.

$$z'z^{-2} + 3z^{-1} = -1$$

Şimdi, $z^{-1} = u$ dönüşümü yapalım. $u = z^{-1} \Rightarrow u' = -z^{-2}z'$

$$-u' + 3u = -1 \Rightarrow u' - 3u = 1$$

$a(x) = -3$ ve $b(x) = 1$ olmak üzere bu bir lineer denklemdir.

Öncelikle integrasyon sabitini bulalım.

$$I(x) = e^{\int -3\,dx} = e^{-3x}$$

Şimdi, her tarafı e^{-3x} ile çarpalım.

$$\underbrace{e^{-3x}u' - 3ue^{-3x}}_{} = e^{-3x} \Rightarrow \left(e^{-3x}\cdot u\right)' = e^{-3x} \Rightarrow e^{-3x}\cdot u = \int e^{-3x}\,dx$$

$$\Rightarrow e^{-3x}\cdot u = -\frac{e^{-3x}}{3} + c \Rightarrow u = -\frac{1}{3} + ce^{3x}$$

$$\underset{u=\frac{1}{z}}{\Rightarrow} \frac{1}{z} = -\frac{1}{3} + c_1 e^{3x} \underset{3c_1=c}{\Rightarrow} z = \frac{3}{ce^{3x}-1} \underset{z=y-2}{\Rightarrow} \boxed{y = \frac{3}{ce^{3x}-1} + 2 \quad c \in \mathbb{R}}$$

Kaybolan çözüm: $z = 0 \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 2}$

Örnek 10

$y' = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x$ denkleminin bir özel çözümü $f(x) = 1$ dir. Bu denklemi çözünüz.
(ÖDEV)