Diferansiyel Denklemler

1. Hafta Uygulama (2. ders) – Ayrılabilir ve homojen denklemler

Orijinal not: diff-2.ders-1-hafta.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

Hatırlatma

x bağımsız değişken, $y = y(x)$ ona bağlı fonksiyon ve bu fonksiyonun $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ türevleri arasındaki

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

şeklindeki ilişkiye "n. mertebeden adi diferansiyel denklem" denir.

Eğer F fonksiyonu y ve onun $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ türevlerine göre lineer olursa bu durumda denkleme "lineer adi diferansiyel denklem" denir.

Ayrılabilir denklemler: $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ şeklinde veya $M_1(x) \cdot M_2(y)\,dx + N_1(x) \cdot N_2(y)\,dy = 0$ şeklindeki denklemlere "değişkenlerine ayrılabilir denklem" denir.
Bu durumda, $M_2(y) \cdot N_1(x) \neq 0$ olursa, denklemi bu çarpana bölüp, integral alınırsa diferansiyel denklemin genel çözümü elde edilmiş olur. Tabi, bu durumda $M_2(y) \cdot N_1(x) = 0$ durumu için çözüm kaybolabilir. O yüzden bu durumu ayrı incelemek gerekir.

Ayrılabilir denklemlere indirgenebilir denklemler: iki tip denklem vardır.

(a) $y' = f(ax + by + c) \Rightarrow z = ax + by + c$ dönüşümü yapılarak integral alınır.

(b) Homojen denklemler: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u = \frac{y}{x}$ dönüşümü yapılarak integral alınır.

Alıştırmalar

Örnek 1

Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin türlerini mertebelerine göre belirleyiniz

* $\frac{dy}{dx} + x^2 y = xe^2$ → 1. mertebeden lineer denklem
* $\frac{d^4y}{dx^4} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + 5y = 0$ → 4. mertebeden lineer olmayan denklem

orj. s. 2

* $\frac{d^2y}{dx^2} + y \sin x = 0$ → 2. mertebeden lineer denklem

* $\frac{d^6x}{dt^6} + \left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right) + x = t$ → 6. mertebeden lineer olmayan denklem

* $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y = \sin x$ → 3. mertebeden lineer denklem

Örnek 2

$x^3 + 3xy^2 = 1$ fonksiyonunun $0 < x < 1$ aralığında $2xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2 + y^2 = 0$ diferansiyel denkleminin bir kapalı çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x^3 + 3xy^2 = 1$ ifadesinin x e göre türevini alalım.

$$3x^2 + 3y^2 + 6xyy' = 0 \Rightarrow 3\left(x^2 + y^2 + 2xyy'\right) = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 + 2xyy' = 0}$$

sağlandığından verilen kapalı form diferansiyel denklemin bir çözümüdür.

Örnek 3

$f(x) = e^{mx}$ fonksiyonunun $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 12y = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olması için m nin alacağı değerler nedir?

Çözüm: $y = e^{mx}$, $y' = me^{mx}$, $y'' = m^2e^{mx}$, $y''' = m^3e^{mx}$ diferansiyel denklemde yerine koyarsak,

$$m^3e^{mx} - 3m^2e^{mx} - 4me^{mx} + 12e^{mx} = 0 \Rightarrow \overbrace{e^{mx}}^{\neq 0}\left(m^3 - 3m^2 - 4m + 12\right) = 0$$

$$\Rightarrow m^3 - 3m^2 - 4m + 12 = 0 \Rightarrow m^2(m-3) - 4(m-3) = 0 \Rightarrow (m-3)(m-2)(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow m = \pm 2,\ 3$$

elde edilir. O halde diferansiyel denklemin çözümleri $y = e^{2x}, e^{-2x}, e^{3x}$ şeklindedir.

Örnek 4

$5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$ fonksiyonunun $x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = x^3y^3$ fonksiyonunun $0 < x < \frac{5}{2}$ aralığında denklemin çözümü olduğunu gösteriniz.

orj. s. 3

Çözüm: $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$ fonksiyonunun x e göre türevini alalım.

$$10xy^2 + 10x^2yy' - 6x^2y^2 - 4x^3yy' = 0 \Rightarrow xy'\left(10xy - 4x^2y\right) = 6x^2y^2 - 10xy^2$$

$$\Rightarrow xy' = \frac{2xy\left(3xy - 5y\right)}{2xy\left(5 - 2x\right)} \Rightarrow xy' = \frac{3xy - 5y}{5 - 2x}$$

ifadesini diferansiyel denklemde yerine yazalım:

$$\left.\begin{aligned} xy' + y = \frac{3xy - 5y}{5 - 2x} + y = \frac{3xy - 5y + 5y - 2xy}{5 - 2x} = \frac{xy}{5 - 2x} \\ 5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1 \Rightarrow x^2y^2(5 - 2x) = 1 \Rightarrow 5 - 2x = \frac{1}{x^2y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$xy' + y = \frac{xy}{\frac{1}{x^2y^2}} \Rightarrow \boxed{xy' + y = x^3y^3}$$

elde edilir. Böylece çözüm olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 5

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nin $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad y'' = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

ifadelerini diferansiyel denklemde yerine koyarsak,

$$\frac{(1+x^2)(6x^2-2)}{(1+x^2)^3} + 4x\cdot\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right) + \underbrace{\frac{2}{1+x^2}}_{(1+x^2)} = \frac{6x^2-2-8x^2+2+2x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

olduğundan verilen $f(x)$ fonksiyonu diferansiyel denklemin bir çözümüdür.

Örnek 6

Aşağıda verilen diferansiyel denklemleri çözünüz.

(a) $4xy\,dx + (x^2+1)\,dy = 0$ (c) $y' + y^2\sin x = 0$

(b) $\operatorname{cosec} y\,dx + \sec x\,dy = 0$ (d) $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$

orj. s. 4

Çözüm: **(a)** $y(x^2+1) \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{4x}{x^2+1}dx + \frac{1}{y}dy = 0 \Rightarrow 2\int\frac{2x\,dx}{x^2+1} + \int\frac{1}{y}dy = c_1 \underset{\substack{x^2+1=u\\ 2x\,dx=du}}{\Rightarrow} 2\ln(x^2+1) + \ln|y| = c_1$$

$$\Rightarrow \ln(x^2+1)^2|y| = c_1 \Rightarrow |y| = \frac{e^{c_1}}{(x^2+1)^2}$$

$$\underset{e^{c_1}=c>0}{\Rightarrow} y = \frac{c}{(x^2+1)^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Şimdi, kaybolma ihtimali olan çözümlere bakalım:

$y(x^2+1) = 0 \Rightarrow y = 0 \rightarrow$ Bu çözümü yukarıda $c = 0$ yazarak elde edebiliriz. O halde, çözüm ailesi

$$y = \frac{c}{(x^2+1)^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

şeklindedir.

(b) $\operatorname{cosec} y \cdot \sec x \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{dx}{\sec x} + \frac{dy}{\operatorname{cosec} y} = 0 \Rightarrow \cos x\,dx + \sin y\,dy = 0 \Rightarrow \int\cos x\,dx + \int\sin y\,dy = c$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin x - \cos y = c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

(c) $\frac{dy}{dx} + y^2\sin x = 0 \Rightarrow dy + y^2\sin x\,dx = 0$ denklemini çözelim.

$y^2 \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{dy}{y^2} + \sin x\,dx = 0 \Rightarrow \int\frac{dy}{y^2} + \int\sin x\,dx = -c \Rightarrow -\frac{1}{y} - \cos x = -c \Rightarrow \frac{1}{y} + \cos x = c$$

Şimdi, kaybolma ihtimali olan çözümlere bakalım.

orj. s. 5

$y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ bir çözümdür. O halde, çözüm ailesi

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y} + \cos x = c\,; & c \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases}$$

şeklindedir.

(d) $\dfrac{dy}{dx} = (\cos^2 x)(\cos^2 2y) \Rightarrow dy = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)\,dx$ denklemini çözelim.

$\cos^2 2y \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{dy}{\cos^2 2y} - \cos^2 x\,dx = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{\cos^2 2y} - \int \cos^2 x\,dx = c_1$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\cos^2 2y} - \int \frac{\cos 2x + 1}{2}\,dx = c_1 \Rightarrow \frac{\tan 2y}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{x}{2} = c_1$$

$$\underset{(2c_1 = c)}{\Rightarrow} \quad 2\tan 2y - \sin 2x - 2x = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Şimdi, kaybolma ihtimali olan çözümlere bakalım.

$$\cos^2 2y = 0 \Rightarrow 2y = \pm\frac{(2n+1)\pi}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{(2n+1)\pi}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \text{çözümdür}$$

O halde, çözüm ailesi,

$$\begin{cases} 2\tan 2y - \sin 2x - 2x = c, & c \in \mathbb{R} \\ y = \pm\dfrac{(2n+1)}{4}\pi, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklindedir.

Claude notu: denklem 4 ile çarpıldığı için muhtemelen $4c_1 = c$ olmalı.

Örnek 7

orj. s. 6

Aşağıdaki başlangıç-değer (Cauchy) problemlerini çözünüz.

(a) $(y+2)\,dx + y(x+4)\,dy = 0, \quad y(-3) = -1$

(b) $y' = \dfrac{x(x^2+1)}{4y^3}, \quad y(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $(3x+8)(y^2+4)\,dx - 4y(x^2+5x+6)\,dy = 0, \quad y(1) = 2$

Çözüm: (a) $(y+2)(x+4) \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{dx}{x+4} + \frac{y}{y+2}dy = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x+4} + \int \frac{\overset{\nearrow y=y+2-2}{y}}{y+2}dy = c$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x+4} + \int \left(1 - \frac{2}{y+2}\right)dy = c \Rightarrow \ln|x+4| + y - 2\ln|y+2| = c$$

$$\Rightarrow \boxed{y + \ln\frac{|x+4|}{(y+2)^2} = c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Şimdi, kaybolma ihtimali olan çözümlere bakalım.

$(y+2)(x+4) = 0 \Rightarrow y = -2 \rightarrow$ çözümdür.

O halde, çözüm ailesi

$$\begin{cases} y + \ln\dfrac{|x+4|}{(y+2)^2} = c \\ y = -2,\ x = -4 \end{cases}$$

şeklindedir. Şimdi, $y(-3) = -1$ koşulunu sağlayan çözümü bulalım.

$$-1 + \ln\frac{1}{(-1+2)^2} = c \Rightarrow -1 = c$$

$$\Rightarrow y + \ln\frac{|x+4|}{(y+2)^2} = -1 \Rightarrow \boxed{e^{-(y+1)}(y+2)^2 = |x+4|} \quad /\!/$$

orj. s. 7

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(x^2+1)}{4y^3} \Rightarrow 4y^3\,dy - x(x^2+1)\,dx = 0$

$$\Rightarrow 4\int y^3\,dy - \int x(x^2+1)\,dx = c_1 \underset{\substack{x^2+1=u \\ 2x\,dx=du}}{\Rightarrow} 4\frac{y^4}{4} - \frac{(x^2+1)^2}{4} = c_1 \overset{(4c_1=c)}{\Rightarrow} \boxed{4y^4 - (x^2+1)^2 = c}$$

Şimdi, $y(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ koşulunu sağlayan çözümü bulalım.

$$4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - (0+1)^2 = c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow 4y^4 - (x^2+1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}} \quad /\!/$$

(c) $(y^2+4)(x^2+5x+6) \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{3x+8}{x^2+5x+6}dx - \frac{4y}{y^2+4}dy = 0 \underset{\left(\frac{3x+8}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x+2}\right)}{\Rightarrow} \frac{dx}{x+3} + \frac{2\,dx}{x+2} - \frac{4y}{y^2+4}dy = 0$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x+3} + 2\int\frac{dx}{x+2} - 2\int\frac{2y\,dy}{y^2+4} = c_1 \Rightarrow \ln|x+3| + 2\ln|x+2| - 2\ln|y^2+4| = c_1$$

$$\Rightarrow \ln\frac{|x+3|(x+2)^2}{(y^2+4)^2} = c_1 \underset{(e^{c_1}=c)}{\Rightarrow} \boxed{c(y^2+4)^2 = |x+3|(x+2)^2 \quad c\in\mathbb{R}}$$

Şimdi, $y(1) = 2$ koşulunu sağlayan çözümü bulalım.

$$c\,8^2 = 4\cdot 9 \Rightarrow c = \frac{9}{16} \Rightarrow \boxed{(x+3)(x+2)^2 = \frac{9}{16}(y^2+4)^2} \quad /\!/$$

Örnek 8

orj. s. 8

Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözünüz.

(a) $(2xy + 3y^2)\,dx - (2xy + x^2)\,dy = 0$

(b) $\left(x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx - \left(xy\sqrt{x^2+y^2}\right)dy = 0$

(c) $(x^2 + 3y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0, \quad y(2) = 6$

Çözüm: $M(x,y) = 2xy + 3y^2$ ve $N(x,y) = 2xy + x^2$ olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} M(tx,ty) &= 2\cdot tx\cdot ty + 3\cdot t^2y^2 = t^2\left(2xy+3y^2\right) = t^2M(x,y)\\ N(tx,ty) &= 2\cdot tx\cdot ty + t^2x^2 = t^2\left(2xy+x^2\right) = t^2N(x,y)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{2. dereceden homojen denklem}$$

Şimdi, $\frac{y}{x} = u$ dönüşümü yapalım.

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u \Rightarrow dy = du\,x + u\,dx$$

$$\Rightarrow \left(2x\cdot ux + 3u^2x^2\right)dx - \left(2xux + x^2\right)(x\,du + u\,dx) = 0$$

$$\Rightarrow \left(2x^2u + 3u^2x^2 - 2x^2u^2 - x^2u\right)dx + \left(-2x^3u - x^3\right)du = 0$$

$$\Rightarrow \left(x^2u^2 + x^2u\right)dx + \left(-2x^3u - x^3\right)du \Rightarrow x^2\left(u^2+u\right)dx - x^3(2u+1)\,du = 0$$

$(u^2+u)x^3 \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{1}{x}dx - \frac{2u+1}{u^2+u}du = 0 \Rightarrow \int\frac{1}{x}dx - \int\frac{2u+1}{u^2+u}du = c_1 \Rightarrow \ln|x| - \ln|u^2+u| = c_1$$

$$\underset{e^{c_1}=c_2}{\Rightarrow} \left|\frac{x}{u^2+u}\right| = c_2 \Rightarrow \frac{x}{u^2+u} = \overbrace{(\pm c_2)}^{c} \Rightarrow x = c\left(u^2+u\right)$$

$$\overset{\frac{y}{x}=u}{\Rightarrow} x = c\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}\right) \qquad c\in\mathbb{R}$$

orj. s. 9

Kaybolan çözümler: $u^2+u = 0 \Rightarrow u(u+1) = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} u = 0 &\Rightarrow y = 0\\ u = -1 &\Rightarrow y = -x\end{aligned}\right\}$ çözümdür. **(b)**

$M(x,y) = \left(x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2}\right)$ ve $N(x,y) = xy\sqrt{x^2+y^2}$ olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} M(tx,ty) &= t^3x^3 + t^2y^2\sqrt{t^2(x^2+y^2)} = t^3M(x,y)\\ N(tx,ty) &= tx\cdot ty\sqrt{t^2(x^2+y^2)} = t^3N(x,y)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{3. dereceden homojen denklem}$$

Şimdi, $\frac{y}{x} = u$ dönüşümü yapalım.

$$y = ux \Rightarrow y' = u'x + u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u \Rightarrow dy = x\,du + u\,dx$$

$$\left(x^3 + u^2x^2\sqrt{x^2+u^2x^2}\right)dx - \left(xux\sqrt{x^2+u^2x^2}\right)(x\,du + u\,dx) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x^3 + u^2x^2\sqrt{x^2+u^2x^2} - x^2u^2\sqrt{x^2+u^2x^2}\right)dx - x^3u\sqrt{x^2+u^2x^2}\,du = 0$$

$$\Rightarrow x^3dx - ux^4\sqrt{1+u^2}\,du = 0$$

$x^4 \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{1}{x}dx - u\sqrt{1+u^2}\,du = 0 \Rightarrow \int\frac{1}{x}dx - \int u\sqrt{1+u^2}\,du = c_1$$

$$\Rightarrow \ln|x| - \frac{(1+u^2)^{3/2}}{3} = c_1 \underset{\frac{y}{x}=u}{\Rightarrow} \ln|x| = c_1 + \frac{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{3/2}}{3}$$

$$\Rightarrow 3\ln|x| = 3c_1 + \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2)^{3/2}} \underset{3c_1=c}{\Rightarrow} \boxed{x^3\ln|x^3| = c + (x^2+y^2)^{3/2}} \quad 2$$

(c) $M(x,y) = x^2 + 3y^2$ ve $N(x,y) = 2xy$ olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} M(tx,ty) &= t^2 M(x,y) \\ N(tx,ty) &= t^2 N(x,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{2. dereceden homojen denklem}$$

Şimdi, $\frac{y}{x} = u$ dönüşümü yapalım.

$$y = ux \Rightarrow dy = x\,du + u\,dx$$

orj. s. 10

$$\left(x^2 + 3u^2x^2\right)dx - (2xux)(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + 3u^2x^2 - 2x^2u^2\right)dx - 2x^3u\,du = 0$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + u^2x^2\right)dx - 2x^3u\,du = 0 \Rightarrow x^2\left(1+u^2\right)dx - 2x^3u\,du = 0$$

$(1+u^2)x^3 \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{1}{x}dx - \frac{2u}{1+u^2}du = c \quad {}^3 \Rightarrow \int\frac{1}{x}dx - \int\frac{2u}{1+u^2}du = c_1 \Rightarrow \ln|x| - \ln(1+u^2) = c_1$$

$$\underset{e^{c_1}=c}{\Rightarrow} \frac{x}{1+u^2} = c \Rightarrow x = c\left(1+u^2\right) \underset{u=\frac{y}{x}}{\Rightarrow} \boxed{x^3 = c\left(x^2+y^2\right) \quad c\in\mathbb{R}}$$

Şimdi, $y(2) = 6$ koşulunu sağlayan çözümü bulalım.

$$8 = c(4+36) \Rightarrow c = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{x^3 = \frac{1}{5}\left(x^2+y^2\right)} \;//$$

Claude notu: muhtemelen $x^3\ln|x^3| = cx^3 + (x^2+y^2)^{3/2}$ olmalı (c terimi de x^3 ile çarpılmalı).
Claude notu: bu adımda sağ taraf muhtemelen 0 olmalı (integral alındıktan sonra sabit c_1 geliyor).