Diferansiyel Denklemler

Uygulama 1. ders (ek ders) – Eğri aileleri ve ayrılabilir denklemler

Orijinal not: uygulama-1-ders-ek-ders.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

EK-HAFTA

Tanım

$y = f(x)$ fonksiyonu x değişkeni ve bu fonksiyonun sınırlı sayıda türevleri ile oluşmuş denkleme n. mertebeli adi türevli diferansiyel denklem denir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x)\,; \quad a_0 \neq 0$$

Diferansiyel denklemlerin bazı kullanım alanları şu şekildedir:

* Mermi, roket, uydu veya gezegenin hareketini belirleme
* Bir elektrik devresindeki yükün veya akımın belirlenmesi
* Kimyasal reaksiyon üzerine çalışmalarda

Örnek

Newton'un ikinci kanununu kullanarak düz bir çizgi boyunca F kuvvetinin etkisi altında hareket eden m kütleli bir cismin konumunu belirleyen denklemi elde ediniz.

Çözüm: Hız ve ivme tanımının $V = \frac{dx}{dt}$, $a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ olduğunu biliyoruz. Newton'un ikinci yasası bize şunu söyler: $F(t) = m \cdot a(t)$

$$F(t) = m \cdot a(t) \Rightarrow F(t) = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F(t)}{m}}$$ denklemi elde edilir.

Alıştırmalar

Örnek 1

Aşağıda verilen eğri ailelerinin diferansiyel denklemlerini bulun.

(a) $y = e^{cx}$

(b) $x^2 + cy^2 = 2y$

(c) $y = \sin(x + c)$

(d) $y = (x - c)^3$

(e) $\ln y = ax + by$

(f) $(x - a)^2 + by^2 = 1$

(g) $y = ax^3 + bx^2 + cx$

orj. s. 2

Çözüm: **(a)** $y = e^{cx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d(e^{cx})}{dx} \Rightarrow y' = ce^{cx} \Rightarrow y' = cy \Rightarrow \boxed{c = \frac{y'}{y}}$

$$y' = \frac{y'}{y} e^{\frac{y'}{y}x} \Rightarrow \boxed{y = e^{\frac{y'}{y}x}}$$

ya da $\Rightarrow$ her iki taraftan ln alırsak

$$\ln y = \frac{y'}{y}x \Rightarrow \boxed{y' = \frac{y \ln y}{x}}$$

(b) $x^2 + cy^2 = 2y \Rightarrow 2x + 2cyy' = 2y' \Rightarrow c = \frac{y' - x}{yy'}$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{(y' - x)}{y \cdot y'} y^2 = 2y \Rightarrow \boxed{x^2 y' - xy = yy'} \quad /\!/$$

(c) $y = \sin(x + c) \Rightarrow y' = \cos(x + c)$

$$\sin^2(x + c) + \cos^2(x + c) = 1 \Rightarrow \boxed{y^2 + (y')^2 = 1}$$

(d)

$$\left.\begin{aligned} y &= (x - c)^3 \Rightarrow y' = 3(x - c)^2 \\ y &= (x - c)^3 \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = x - c \Rightarrow c = x - y^{\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{y' = 3y^{\frac{2}{3}}}$$

(e) $\ln y = ax + by \Rightarrow \underbrace{\boxed{\frac{y'}{y} = a + by'}}_{(*)}$ → Buradan bir türev daha alırsak a sabitinden kurtuluruz ve b sabitini bulmuş oluruz.

$$\frac{y'' \cdot y - (y')^2}{y^2} = by'' \Rightarrow \boxed{b = \frac{y''y - (y')^2}{y^2 y''}}$$ → Bunu $(*)$ da yerine yazarsak,

$$a = \frac{y'}{y} - y' \left(\frac{y''y - (y')^2}{y^2 y''} \right) \Rightarrow a = \underbrace{\frac{y'}{y}}_{(yy'')} - \frac{y'y''y - (y')^3}{y^2 y''} \Rightarrow \boxed{a = \frac{(y')^3}{y''y^2}}$$

O halde,

$$\ln y = \frac{(y')^3 x}{y''y^2} + \frac{y''y^2}{y^2 y''} - \frac{(y')^2 y}{y^2 y''} \Rightarrow \ln y = \frac{(y')^3 x}{y''y^2} + 1 - \frac{(y')^2 y}{y^2 y''}$$

orj. s. 3

$$\Rightarrow (\ln y - 1) y^2 y'' = (y')^3 x - (y')^2 y \Rightarrow \boxed{(\ln y - 1) y^2 y'' = (y')^2 (y'x - y)} \quad /\!/ \text{ bulunur.}$$

(f) $(x - a)^2 + by^2 = 1 \Rightarrow \underbrace{\boxed{2(x - a) + 2byy' = 0}}_{(*)}$

$$\Rightarrow 2 + 2by' \cdot y' + 2byy'' = 0 \Rightarrow b(y')^2 + byy'' = -1 \Rightarrow \boxed{b = \frac{-1}{(y')^2 + yy''}}$$

Bulduğumuz b değerini $(*)$ da yazarsak,

$$2(x - a) - \frac{2yy'}{(y')^2 + yy''} = 0 \Rightarrow x - a = \frac{yy'}{(y')^2 + yy''} \Rightarrow \boxed{a = x - \frac{yy'}{(y')^2 + y''y}}$$

Claude ile dijitalleştirildi · hata içerebilir / Digitised with Claude · may contain errors

O halde,

$$\left(x - x + \frac{yy'}{(y')^2 + y''y}\right)^2 - \frac{y^2}{(y')^2 + yy''} = 1 \Rightarrow \frac{y^2(y')^2}{\left((y')^2 + y''y\right)^2} - \frac{y^2}{(y')^2 + yy''} = 1$$

$$\Rightarrow y^2(y')^2 - y^2\left((y')^2 + y''y\right) = \left((y')^2 + yy''\right)^2 \Rightarrow \boxed{-y^3y'' = \left((y')^2 + yy''\right)^2} \text{ // bulunur}$$

(g) $y = ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c \quad \cdots (*)$

$$\Rightarrow y'' = 6ax + 2b \quad \cdots (**)$$

$$\Rightarrow y''' = 6a \Rightarrow \boxed{a = \frac{y'''}{6}} \rightarrow \text{Bu değeri } (**) \text{ da yerine yazalım.}$$

$$y'' = y'''x + 2b \Rightarrow \boxed{b = \frac{y'' - y'''x}{2}} \rightarrow \text{Bu değeri } (*) \text{ da yerine yazalım.}$$

$$y' = \frac{y'''x^2}{2} + y''x - y'''x^2 + c \Rightarrow \boxed{c = y' + \frac{y'''x^2}{2} - y''x}$$

O halde,

$$y = \frac{y'''}{6}x^3 + \frac{y''x^2}{2} - \frac{y'''x^3}{2} + y'x + \frac{y'''x^3}{2} - y''x^2 \Rightarrow \boxed{6y = y'''x^3 - 3y''x^2 + 6y'x} \text{ //}$$

bulunur.

Örnek 2

orj. s. 4

Aşağıda verilen diferansiyel denklemleri çözünüz.

(a) $y' = (x^2 + x - 2)\sin 3x$

(b) $y' = \dfrac{1}{4x^3 + x}$

(c) $y' = \dfrac{x}{(x-1)^3}$

Çözüm: (a) $\dfrac{dy}{dx} = (x^2 + x - 2)\sin 3x \Rightarrow dy = (x^2 + x - 2)\sin 3x\,dx$

$$\Rightarrow \int dy = \int (x^2+x-2)\sin 3x\,dx \quad \Rightarrow \quad y = -(x^2+x-2)\frac{\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\int (2x+1)\cos 3x\,dx$$

$$\left(\begin{array}{l} x^2+x-2=u \Rightarrow (2x+1)dx=du \\ \sin 3x\,dx=dv \Rightarrow -\frac{\cos 3x}{3}=v \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = -(x^2 + x - 2)\frac{\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}(2x + 1)\sin 3x - \frac{2}{9}\int \sin 3x\,dx$$

$$\left(\begin{array}{l} u=2x+1 \Rightarrow 2dx=du \\ \cos 3x\,dx=dv \Rightarrow \frac{\sin 3x}{3}=v \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -(x^2 + x - 2)\frac{\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}(2x + 1)\sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + c} \text{ //}$$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{4x^3 + x} \Rightarrow dy = \dfrac{dx}{4x^3 + x} \Rightarrow \int dy = \int \dfrac{dx}{4x^3 + x}$

$$\frac{1}{4x^3 + x} = \frac{1}{x(4x^2 + 1)} = \underset{(4x^2+1)}{\frac{A}{x}} + \underset{(x)}{\frac{Bx + C}{4x^2 + 1}} \Rightarrow 1 = A(4x^2 + 1) + (Bx + C)x$$

$x = 0 \Rightarrow \boxed{A = 1}$

x^2 li terim: $0 = 4A + B \Rightarrow \boxed{B = -4}$

x li terim: $\boxed{0 = C}$

orj. s. 5

$$\Rightarrow y = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-4x}{4x^2+1}dx \underset{\substack{4x^2+1=u \\ 8x\,dx=du}}{\Rightarrow} y = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \Rightarrow y = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|u| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(4x^2+1) + c} \;//$$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{(x-1)^3} \Rightarrow dy = \dfrac{x\,dx}{(x-1)^3} \Rightarrow \int dy = \int \dfrac{x\,dx}{(x-1)^3} \underset{x-1=u \Rightarrow dx=du}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow y = \int \frac{u+1}{u^3}du \Rightarrow y = \int \frac{1}{u^2}du + \int \frac{1}{u^3}du \Rightarrow y = -\frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2} + c$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + c} \;//$$

Örnek 3

Aşağıda verilen diferansiyel denklemleri çözünüz.

(a) $y' = \dfrac{1}{y - \sqrt{y}}$

(b) $y' = \dfrac{1}{y^2(4-y^2)}$

(c) $y' = e^y - 1$

(d) $y' = \dfrac{1+y^2}{-2\arctan y}$

(e) $y \cdot \sin y \cdot \cos y \cdot y' = 1$

(f) $y^2y' + yy' = e^y$

Çözüm: (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y-\sqrt{y}} \Rightarrow (y - \sqrt{y})\,dy = dx \Rightarrow \int y\,dy - \int \sqrt{y}\,dy = \int dx$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + c = x}$$

orj. s. 6

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y^2(4-y^2)} \Rightarrow y^2(4-y^2)\,dy = dx \Rightarrow \int y^2(4-y^2)\,dy = \int dx$

$$\Rightarrow \int 4y^2dy - \int y^4dy = \int dx \Rightarrow \boxed{x = \frac{4y^3}{3} - \frac{y^5}{5} + c} \;//$$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = e^y - 1 \Rightarrow \dfrac{dy}{e^y-1} = dx \Rightarrow \int \dfrac{dy}{e^y-1} = \int dx \underset{\substack{e^y=u \\ e^y dy = du}}{\Rightarrow} \int \dfrac{du}{u(u-1)} = \int dx$

$$\underset{\frac{1}{u(u-1)} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}}{\Rightarrow} \int \frac{du}{u-1} - \int \frac{du}{u} = \int dx \Rightarrow x = \ln|u-1| - \ln|u| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \ln|e^y - 1| - y + c} \;//$$

(d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{-2\arctan y} \Rightarrow \dfrac{-2\arctan y\,dy}{1+y^2} = dx \Rightarrow -2\int \dfrac{\arctan y\,dy}{1+y^2} = \int dx$

$$\underset{\substack{\arctan y = u \\ \frac{dy}{1+y^2} = du}}{\Rightarrow} -2\int u\,du = \int dx \Rightarrow -u^2 + c = x \Rightarrow \boxed{x = -\arctan^2 y + c} \;//$$

(e) $y\sin y\cos y\dfrac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow y\sin y\cos y\,dy = dx \Rightarrow \int y\sin y\cos y\,dy = \int dx$

$$\underset{\sin 2y = 2\sin y\cos y}{\Rightarrow} \frac{1}{2}\int y\sin 2y\,dy = x \qquad \underset{\substack{y=u \Rightarrow dy=du \\ \sin 2y\,dy = dv \Rightarrow v = -\frac{\cos 2y}{2}}}{\Rightarrow} \qquad x = -\frac{1}{4}y\cos 2y + \frac{1}{4}\int \cos 2y\,dy$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{4}y\cos 2y + \frac{1}{8}\sin 2y + c} \;//$$

orj. s. 7

(f) $y'(y^2+y) = e^y \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}(y^2+y) = e^y \Rightarrow \dfrac{(y^2+y)\,dy}{e^y} = dx$

$$\Rightarrow \int \frac{y^2+y}{e^y}dy = \int dx \Rightarrow \underbrace{\int \frac{y^2\,dy}{e^y}}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{y\,dy}{e^y}}_{I_2} = \int dx$$

I_1 için $\left.\begin{array}{l} u = y^2 \Rightarrow du = 2y\,dy \\ e^{-y}dy = dv \Rightarrow -e^{-y} = v \end{array}\right\} \Rightarrow I_1 = -y^2e^{-y} + 2\int \frac{y}{e^y}dy = -y^2e^{-y} - 2ye^{-y} - 2e^{-y}$

I_2 için: $\left.\begin{array}{l} u = y \Rightarrow du = dy \\ e^{-y}dy = dv \Rightarrow -e^{-y} = v \end{array}\right\} \Rightarrow I_2 = -ye^{-y} + \int e^{-y}dy = -ye^{-y} - e^{-y}$

$$\Rightarrow \boxed{x = -y^2e^{-y} - 3ye^{-y} - 3e^{-y} + c} \;//$$

Örnek 4

$y = 3e^x + 4e^{2x} + 2e^{-2x}$ fonksiyonunun $y'' - 3y' + 2y = 24e^{-2x}$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{l} y' = 3e^x + 8e^{2x} - 4e^{-2x} \\ y'' = 3e^x + 16e^{2x} + 8e^{-2x} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3e^x + 16e^{2x} + 8e^{-2x} - 3\left(3e^x + 8e^{2x} - 4e^{-2x}\right) + 2\left(3e^x + 4e^{2x} + 2e^{-2x}\right) =$$

$$= 3e^x + 16e^{2x} + 8e^{-2x} - 9e^x - 24e^{2x} + 12e^{-2x} + 6e^x + 8e^{2x} + 4e^{-2x}$$

$$= 24e^{-2x} \;//$$

Örnek 5

orj. s. 8

$y' = 5y - 3,\ y(2) = 1$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = 5y - 3 \Rightarrow \frac{dy}{5y-3} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{5y-3} = \int dx \Rightarrow \frac{\ln|5y-3|}{5} = x + c$$

$$\Rightarrow \ln|5y-3| = 5x + 5c_1 \Rightarrow y(x) = \frac{e^{5(x+c_1)}+3}{5} = \frac{e^{5x}\overbrace{e^{5c_1}}^{c}+3}{5} \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{ce^{5x}+3}{5}}$$

↓ genel çözüm

$$y(2) = 1 \Rightarrow \frac{ce^{10}+3}{5} = 1 \Rightarrow c = 2e^{-10}$$

Bu durumda, özel çözüm $\Rightarrow \boxed{y = \frac{2e^{5x-10}+3}{5}}$ bulunur.

NOT: Verilen bir eğri ailesinin ortogonal (dik) yörüngeleri nasıl bulunur?

Birbirini 90° açıyla kesen doğrulara birbirinin ortogonalidir denir. Bu nedenle doğrulardan birinin eğimi m ise buna ortogonal olan diğerinin eğimi $-\frac{1}{m}$ olacaktır. Tanımı genişletecek olursak, örneğin bir xy-düzlemindeki $F(x,y) = c$ eğri ailesinin her bir ailesi, aynı düzlemdeki $G(x,y) = K$ eğri ailesinin her bir eğrisini dik olarak kesiyorsa, bu eğriler birbirinin ortogonalidir. Verilen bir eğri ailesine dik olan eğri ailesini bulmak için şu adımlar izlenmelidir:

(1) Verilen ifadenin ($F(x,y) = c$) x e göre türevi alınıp $\frac{dy}{dx}$ oluşturulur
(2) Bu iki denklemden ($F(x,y) = c$ ve bunun türevini veren denklem) C yok edilir
(3) İkinci denklemde $\frac{dy}{dx}$ yerine $-\frac{dx}{dy}$ alınarak elde edilecek diferansiyel denklem çözülür.

Örnek 6

orj. s. 9

$y = cx^4$ eğri ailesinin ortogonal yörüngesini bulunuz.

Çözüm: 1. adım: $dy = 4cx^3dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4cx^3$

2. adım:

$$\left.\begin{aligned} y = cx^4 \Rightarrow c = \frac{y}{x^4} \\ \frac{dy}{dx} = 4cx^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$$

3. adım: $-\frac{dx}{dy} = \frac{4y}{x} \Rightarrow -x\,dx = 4y\,dy \Rightarrow -\int x\,dx = 4\int y\,dy$

$$\Rightarrow 2y^2 = -\frac{x^2}{2} + c_1 \Rightarrow \boxed{4y^2 = -x^2 + 2c_1}$$

Örnek 7

$y^2 = x + c$ eğri ailesinin ortogonal yörüngesini bulunuz.

Çözüm: 1. adım: $2y\,dy = dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

2. adım: Türevi veren denklemde c sabiti yok

3. adım: $-\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y} \Rightarrow \frac{dy}{2y} = -dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y} = -\int dx \Rightarrow \frac{\ln|y|}{2} = -x + c_1$

$$\Rightarrow \ln|y| = -2x + \underbrace{2c_1}_{c_2} \Rightarrow y = e^{-2x+c_2} \underset{\downarrow\, k=e^{c_2}}{\Rightarrow} \boxed{y = ke^{-2x}}$$

NOT: Verilen bir eğri ailesinin eğik yörüngeleri nasıl bulunur?

Bir f eğri ailesi ile θ açısı yapan bir g eğri ailesinin denklemini bulalım. f ve g ailelerinin herhangi iki eğrisinin kesiştiği nokta $M(x, y)$ olsun. f ye ait eğrinin M noktasındaki teğeti x eksenini β açısı ile kesişsin. g eğri ailesine ait eğrinin M noktasındaki teğetinin x eksenini α açısı ile kestiğini varsayalım.

Claude ile dijitalleştirildi · hata içerebilir / Digitised with Claude · may contain errors