İşaretler ve Sistemler

Ders 1 – İşaretler: enerji, güç ve temel işlemler

Orijinal not: Isaret-ve-Sistemler-ders-1.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

İşaretler ve Sistemler

Tanım (İşaret – signal)

orj. s. 1

Herhangi bir fiziki olay hakkında bilgi taşıyan, bir veya daha fazla bağımsız değişkeni olan fonksiyondur.

Sürekli zamanlı işaret (continuous-time signal)

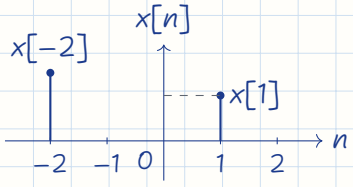
$x(t)$
↪ bağımsız değişkeni t süreklidir.



ör: Ses işareti akustik basıncın zamana bağlı bir fonksiyonudur.
Resim parlaklığın iki uzamsal (x, y) değişkene bağlı bir fonksiyonudur.

Ayrık zamanlı işaret (discrete-time signal)

$x[n]$
↪ bağımsız değişkeni n süreksizdir ($n \in \mathbb{Z}$, tamsayı değerleri alır.)



ör: Yıllık nüfus sayısı

Ayrık zamanlı işaret;

- olayın doğası gereği ayrık değerler alabilir.
- sürekli zamanlı işaretin zamanda belli aralıklarla örneklenmesiyle elde edilebilir.

$$x(t) \xrightarrow[\text{Sampling}]{@\,nT_s} x(nT_s) \equiv x[n]$$

Enerji (energy of a signal)

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt$$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Güç (power of a signal)

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt$$

$$P_x = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

* $E_x < \infty$ ise $x(t)/x[n]$ işareti enerji işaretidir ve ortalama gücü sıfırdır, $P_x = 0$.
* $0 < P_x < \infty$ ise $x(t)/x[n]$ işareti güç işaretidir ve enerjisi sonsuzdur, $E_x \to \infty$.
* Bazı işaretler ne enerji ne de güç işareti olmayabilirler.
  Ör: $x(t) = kt \longrightarrow E_x \to \infty$
  $\hookrightarrow P_x \to \infty$

Bağımsız değişkenlerin dönüşümleri

orj. s. 2

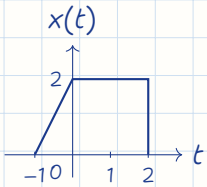
(Transformation of independent variable)

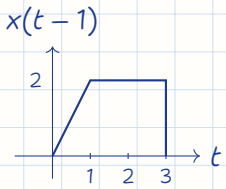
Zamanda öteleme (time shifting)

$$x(t) \longrightarrow x(t - t_0) \quad \begin{cases} \longrightarrow t_0 > 0 & \text{gecikme (delay), sağa öteleme} \\ \hookrightarrow t_0 < 0 & \text{ilerleme (advance), sola öteleme} \end{cases}$$

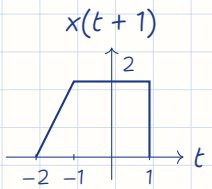
$$x[n] \longrightarrow x[n - n_0]$$

Ex:





$t_0 = 1 > 0$ gecikme/sağa öteleme



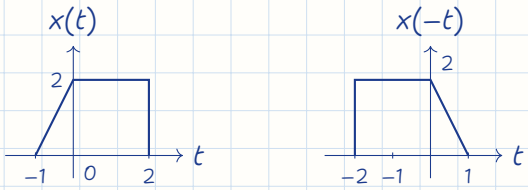
$t_0 = -1 < 0$ ilerleme/sola öteleme

Zamanda ters çevirme (time reversal)

$$x(t) \longrightarrow x(-t) \longrightarrow \text{orijine veya sıfır noktasına göre yansımasını alma}$$

$$x[n] \longrightarrow x[-n]$$

Ex:



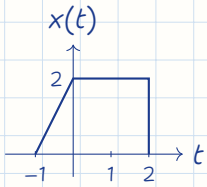
Zamanda ölçekleme (time scaling)

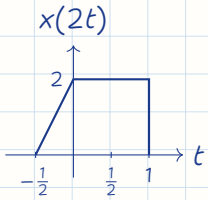
$x(t) \longrightarrow x(\alpha t)$ $\longrightarrow \alpha > 1$ sıkıştırma (compression)

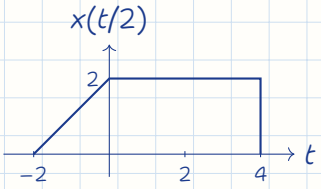
$\hookrightarrow 0 < \alpha < 1$ genişletme (expansion)

$x[n] \longrightarrow x[\alpha n]$

Ex:







$x(t)$, $t : [-1,2]$
$x(2t)$, $2t : [-1,2]$
$\hookrightarrow t : [-1/2,\ 1]$
$\alpha = 2 > 1$ sıkıştırma

$x(t)$, $t : [-1,2]$
$x(t/2)$, $t/2 : [-1,2]$
$\hookrightarrow t : [-2,4]$
$0 < \alpha = \frac{1}{2} < 1$ genişletme

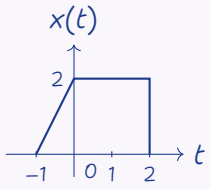
orj. s. 3

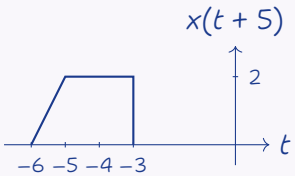
$*\ x(t) \longrightarrow x(\alpha t + \beta)$

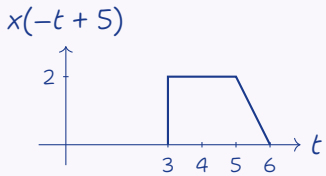
1) β kadar öteleme
2) α kadar ölçekleme ve gerekiyorsa zamanda ters çevirme

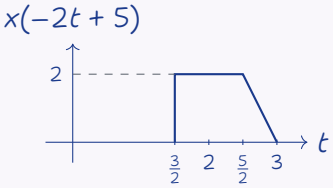
Örnek

$x(t)$ veriliyor; $x(-2t + 5) = ?$





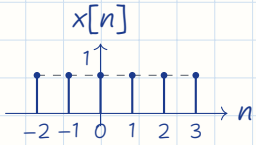


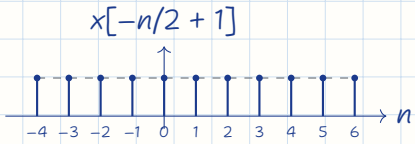


$x(t)$, $t : [-1,2]$
$x(-2t + 5)$, $-2t + 5 : [-1,2]$
$t : [1{,}5,\ 3]$

Örnek

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < -2 \text{ ve } n > 3 \\ 1, & \text{diğer} \end{cases}$$ olmak üzere $x[-n/2 + 1] = ?$





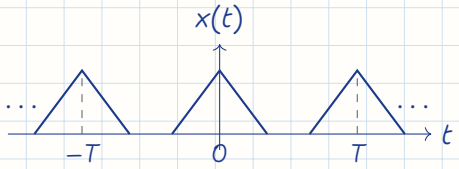
$x[n]$, $n : [-2,3]$
$x[-n/2 + 1]$, $-\frac{n}{2} + 1 : [-2,3]$
$n : [-4,6]$[1]

Periyodik işaretler (periodic signals)

orj. s. 4

$x(t) = x(t + kT_0)$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, T_0 : periyot ⟶ Periyodik.
$x[n] = x[n + kN_0]$, $n, k \in \mathbb{Z}$, N_0 : periyot

Bu eşitlikleri sağlayan T_0/N_0 yok ise işaret aperiyodiktir.
Ex:



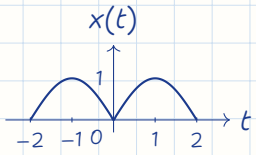
$\Rightarrow x(t) = x(t + T)$, T ile periyodiktir.

Ex: $x(t) = \cos(t)$

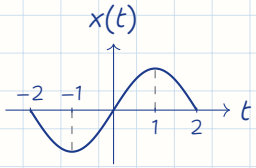
$$x(t + kT_0) = \cos(t + kT_0) \underset{T_0 = 2\pi}{=} \cos(t + 2\pi k) = \cos(t) = x(t)$$

Tek (Odd) / Çift (Even) İşaretler

Çift: $x(t) = x(-t) \longrightarrow \forall t$ için y eksenine göre simetrik ise çift işarettir.
$x[n] = x[-n]$



Tek: $x(t) = -x(-t) \longrightarrow \forall t$ için orijine göre simetrik ise tek işarettir.
$x[n] = -x[-n]$



$$* \quad x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \qquad x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

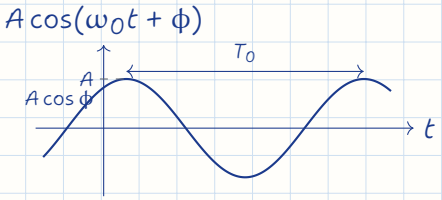
[1] Claude notu: ayrık zamanda $-n/2 + 1$ yalnızca çift n için tamsayıdır; tek n değerlerinde $x[-n/2 + 1]$ tanımsızdır (genellikle 0 alınır), yani çubuklar muhtemelen yalnızca $n = -4, -2, 0, 2, 4, 6$ noktalarında olmalı.

Üstel ve Sinüsoidal İşaretler (Exponential and sinusoidal Signals)

Sürekli zamanlı sinüsoidal işaretler

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \longrightarrow \begin{cases} A: \text{genlik} \\ \omega_0: \text{açısal frekans, [rad/sn]} \\ \phi: \text{faz} \end{cases}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \longrightarrow \begin{cases} T_0: \text{periyot, [sn]} \\ f_0 = \dfrac{1}{T_0}: \text{frekans, } \left[\text{Hertz} = \dfrac{1}{\text{sn}}\right] \end{cases}$$

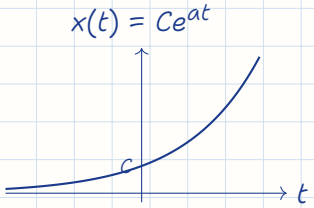


$\Rightarrow$ (Açısal) frekans x Periyot
$\omega_0 \uparrow \; f_0 \uparrow \; T_0 \downarrow$ işaretin salınımı hızlanır.
$\omega_0 \uparrow \; f_0 \uparrow \; T_0 \downarrow$ işaretin osilasyonu artar, periyot azalır
$x(t) = \text{Constant}$ ise $T_0 \to \infty$ (undefined) $f_0 \to 0$
osilasyonu yoktur

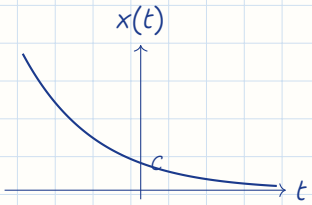
Sürekli zamanlı karmaşık üstel işaretler

$$x(t) = Ce^{at} \longrightarrow \begin{cases} C = |C|e^{j\theta} \\ a = r + j\omega_0 \end{cases}$$

* a ve C reel/gerçek ise $x(t)$ reel üstel (real exponential) işarettir.
$C = |C|$ ve $a = r$



$a > 0$ iken artan üstel



$a < 0$ iken azalan üstel

* $a = j\omega_0$ $(r = 0)$ olmak üzere tamamen sanal olduğunda $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ olup, periyodik karmaşık üstel (periodic complex exponential) işarettir.

$x(t) \stackrel{?}{=} x(t + T)$ ise periyodiktir.
İspat: $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

$$x(t + T) = e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\omega_0 T}$$

Eğer $e^{j\omega_0 T} = 1$ olursa $x(t)$'nin periyodikliği ispatlanır.

$$e^{j\omega_0 T} = 1 = e^{j2\pi}, \quad \omega_0 T = 2\pi \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \omega_0 \neq 0$$

$\omega_0 = 0, x(t) = 1$
$T \to \infty$

Euler bağıntısı $\Rightarrow e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

orj. s. 6

$$e^{j2\pi} = \underbrace{\cos 2\pi}_{1} + j\underbrace{\sin 2\pi}_{0} = 1$$

$e^{j\pi} = -1$

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t \quad \begin{matrix} \longrightarrow \cos\omega_0 t = (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})/2 \\ \hookrightarrow \sin\omega_0 t = (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})/2j \end{matrix}$$

$$Ae^{j(\omega_0 t+\phi)} = A\cos(\omega_0 t + \phi) + jA\sin(\omega_0 t + \phi) \longrightarrow$$
$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = \mathrm{Re}\{Ae^{j(\omega_0 t+\phi)}\}$$
$$A\sin(\omega_0 t + \phi) = \mathrm{Im}\{Ae^{j(\omega_0 t+\phi)}\}$$

Ayrık zamanlı sinüsoidal işaretler

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}\left[e^{j(\omega_0 n+\phi)} + e^{-j(\omega_0 n+\phi)}\right] = \frac{A}{2}\left[e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right]$$

Ayrık zamanlı karmaşık üstel işaretler

$$x[n] = C\alpha^n \longrightarrow \begin{matrix} C = |C|e^{j\theta} \\ \alpha = |\alpha|e^{j\omega_0} \end{matrix}$$

$N_0 = 2\pi/\omega_0$

* C ve α reel ise $x[n]$ reel üstel işarettir.
* $\alpha = e^{j\omega_0}$ olmak üzere $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ işareti periyodik üstel işarettir.

Ayrık zamanlı karmaşık üstel işaretlerin periyodikliği

* $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

$$\omega_0 + 2\pi \longrightarrow e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}\cdot\underbrace{e^{j2\pi n}}_{\to 1} = e^{j\omega_0 n}$$

Ayrık zamanlı karmaşık üstel işaretler ancak 2π aralığındaki frekanslarda farklılık gösterirler. Bu nedenle bu işaretleri $-\pi < \omega_0 < \pi$ veya $0 < \omega_0 < 2\pi$ aralıklarında incelemek yeterlidir.

* $x[n] \stackrel{?}{=} x[n+N]$

$$x[n+N] = e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}\cdot e^{j\omega_0 N}$$
$$e^{j\omega_0 N} = 1 = e^{j2\pi m} \longrightarrow \omega_0 N = 2\pi m$$
$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}, \quad m \text{ ve } N > 0 \in \mathbb{Z} \left(\tfrac{m}{N} \text{ kesirli yani iki tam sayının oranı olmalı}\right)$$
$$N = \left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)m$$

orj. s. 7

$e^{j\omega_0 t}$

ω_0'ın farklı değerleri için farklı işaret

Herhangi bir ω_0 değeri için periyodik

Esas frekans ω_0

Esas periyot $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, $\omega_0 \neq 0$

$e^{j\omega_0 n}$

2π'nin katlarındaki ω_0 değerleri için aynı işaret

$\dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{m}{N}$ kesirli bir ifade ise periyodik

$(m, N > 0 \in \mathbb{Z})$

Esas frekans $\dfrac{\omega_0}{m}$

Esas periyot $N_0 = m\left(\dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)$

Örnek

$x[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5}$, $y[n] = 3e^{j3(n+1/2)/5}$ işaretleri periyodik midir?

Çözüm:

$$x[n] = 3e^{j\frac{3\pi}{5}(n+\frac{1}{2})} = 3e^{j\frac{3\pi}{10}} \cdot e^{j\frac{3\pi n}{5}} = Ce^{j\omega_0 n} \longrightarrow \begin{matrix} C = 3e^{j3\pi/10} \\ \omega_0 = \dfrac{3\pi}{5} \end{matrix}$$

$$x[n] \stackrel{?}{=} x[n+N] \longrightarrow N_0 = \left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)m = m\,\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{5}} = m\,\frac{10}{3} \in \mathbb{Z}$$

$N_0 = 10$ periyodu ile periyodik

$$y[n] = 3e^{j\frac{3}{10}} \cdot e^{j\frac{3n}{5}} = Ce^{j\omega_0 n} \longrightarrow \begin{matrix} C = 3e^{j3/10} \\ \omega_0 = 3/5 \end{matrix}$$

$$N_0 = \frac{2\pi}{3/5}\,m = \frac{10\pi}{3}\,m \notin \mathbb{Z}$$ olup aperiyodik

Örnek

$x(t) = 2\cos(10t + 1) - \sin(4t - 1)$ işaretinin periyodu nedir?

Çözüm:

$$\left.\begin{matrix} A\cos(\omega_0 t + \phi) \longrightarrow \omega_{01} = 10 \quad T_{01} = \dfrac{2\pi}{\omega_{01}} = \dfrac{2\pi}{10} = \dfrac{\pi}{5} \\ A\sin(\omega_0 t + \phi) \longrightarrow \omega_{02} = 4 \quad T_{02} = \dfrac{2\pi}{\omega_{02}} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} T_0 = \pi$$