İşaretler ve Sistemler

Ders 13 – z-Transformu

Orijinal not: Isaret-ve-Sistemler-ders-13.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

z-transformu

orj. s. 1

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$$

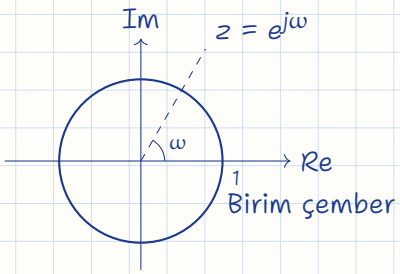
$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

$$\Rightarrow z = re^{j\omega} \quad \begin{cases} \longrightarrow r: \text{ magnitude} \\ \hookrightarrow \omega: \text{ angle} \end{cases}$$

$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$$

$\Rightarrow z = e^{j\omega} \quad (r = 1)$

$$X(z) = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\{x[n]\} = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$



z-düzlemi

$\Rightarrow$ **Yakınsama bölgesi (region of convergence):** z-transform toplamının yakınsadığı z değer aralığıdır.

Not: z-transformunun ROC'u birim çemberi içerirse Fourier transformu yakınsar.

Örnek

$x[n] = a^n u[n]$

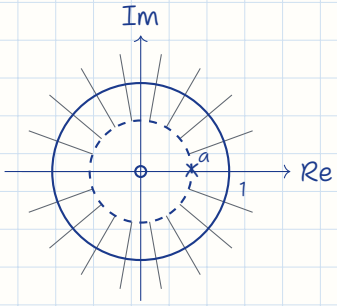
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Reminder: $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \quad |\alpha| < 1$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |az^{-1}| < 1, \quad |z| > |a|$$

orj. s. 2

$$\left.\begin{aligned} a^n u[n] &\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a| \\ u[n] &\longleftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1 \end{aligned}\right\} \; a = 1$$



z-düzlemi / kutup-sıfır çizimi

x: kutup
o: sıfır

$0 < a < 1$

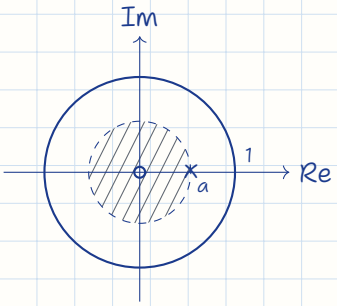
Örnek

$x[n] = -a^n u[-n-1]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1]z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n}z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n$$

$$= 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |a^{-1}z| < 1, \quad |z| < |a|$$

$$-a^n u[-n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| < |a|$$



$0 < a < 1$

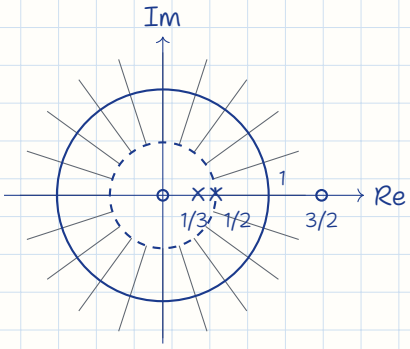
$X(z)$'in ROC'u birim çemberi içermediğinden, $x[n]$'nin Fourier Transformu yoktur.

Örnek

$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

Reminder: $a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$

$$X(z) = \underbrace{\frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}_{\substack{|\frac{1}{3}z^{-1}|<1 \\ |z|>1/3}} - \underbrace{\frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{\substack{|\frac{1}{2}z^{-1}|<1 \\ |z|>1/2}} = \frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{z(z-3/2)}{(z-1/3)(z-1/2)}, \quad |z| > 1/2$$



orj. s. 3

Örnek

$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) u[n], \quad X(z) = ?$

$$x[n] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n]$$

$$X(z) = \underbrace{\frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}}}_{|\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}|>1} - \underbrace{\frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}}}_{|\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}|>1} = \frac{z/3\sqrt{2}}{(z-\frac{1}{3}e^{j\pi/4})(z-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4})}, \quad |z| > 1/3$$[1]

Not:

Payın derecesi $\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}$ paydanın derecesi $\begin{matrix} \longrightarrow \text{sonsuzda kutup vardır} \\ \longrightarrow \text{sonsuzda sıfır vardır} \end{matrix}$

Yakınsaklık bölgesi (ROC) özellikleri

1) $X(z)$'nin ROC'u z-düzleminde orijin merkezli bir halkadan oluşur.

$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r^{-n} < \infty$$

2) ROC, herhangi bir kutup içermez.

3) $x[n]$ sonlu süreli ise, ROC, $z \overset{\text{olası}}{=} 0$ ve/veya $z = \infty$ değerleri dışında bütün z-düzlemidir.

Örnek

$x[n] = \delta[n]$

[1] Claude notu: geometrik serinin yakınsaması için koşullar muhtemelen $|\cdot| < 1$ olmalı; bu da yazılan $|z| > 1/3$ sonucunu verir.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]z^{-n} \underset{\delta[n]=1,\ n=0}{=} 1$$

$$\delta[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} 1, \quad \forall z \quad (\text{ROC, } z = 0 \text{ ve } z = \infty \text{ içeren bütün z-düzlemidir})$$

Örnek

$x[n] = \delta[n-1]$

orj. s. 4

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-1]z^{-n} \underset{\delta[n-1]=1,\ n=1}{=} z^{-1} = \frac{1}{z}$$

$z = 0$'da bir kutup var.
ROC, $z = \infty$ içeren, $z = 0$ dışında bütün z-düzlemidir.

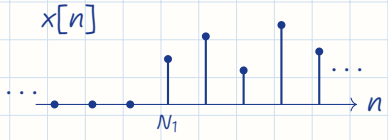
Örnek

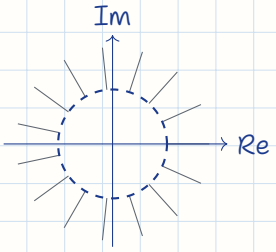
$x[n] = \delta[n+1]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+1]z^{-n} \underset{\delta[n+1]=1,\ n=-1}{=} z$$

$z = \infty$'da bir kutup vardır.
ROC, $z = 0$ içeren, $z = \infty$ dışında bütün z-düzlemidir.

4) $x[n]$ sağ yanlı ve $|z| = r_0$ çemberi ROC'da ise, $|z| > r_0$ sağlayan sonlu bütün z değerleri de ROC'da olur.



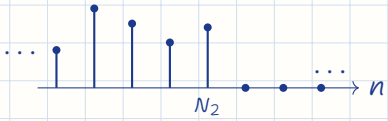


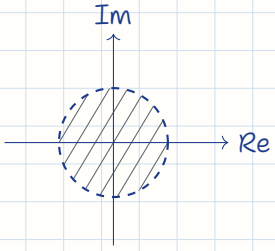
$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$\longrightarrow N_1 < 0$ iken $z \to \infty$, $X(z)$ sonsuz olur ve ROC, $z = \infty$ içermez.
$\hookrightarrow x[n] = 0,\ n < 0$ için $N_1 \geq 0$ olur ve ROC, $z = \infty$ içerir.

$\rightarrow$ sağ yanlı $x[n]$'nin ROC'u içi bir çember ile sınırlanmış, sonsuza doğru genişleyen (sonsuzu içerebilir) bir bölgedir.

5) $x[n]$ sol yanlı ve $|z| = r_0$ çemberi ROC'da ise, $0 < |z| < r_0$ sağlayan bütün z değerleri de ROC'da olur.





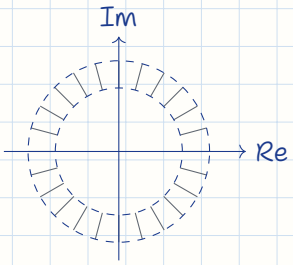
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n]z^{-n}$$

$\longrightarrow N_2 > 0$ iken $z \to 0$, $X(z)$ sonsuza gider ve ROC, $z = 0$ içermez.
$\hookrightarrow x[n] = 0,\ n > 0$ için $N_2 \leq 0$ olur ve ROC, $z = 0$ içerir.

$\rightarrow$ sol yanlı $x[n]$'nin ROC'u dışı bir çember ile sınırlanmış, orijine doğru genişleyen (orijini içerebilir) bir bölgedir.

orj. s. 5

6) $x[n]$ iki yanlı ve $|z| = r_0$ çemberi ROC'da ise, ROC, z-düzleminde $|z| = r_0$ çemberini içeren bir halkadır.



7) $X(z)$ rasyonel ise, ROC, ya kutuplarla sınırlıdır ya da sonsuza genişler ve kutup içermez.
→ $x[n]$ sağ yönlü ise, ROC, en dıştaki kutubun dışındaki z-düzlemidir.
→ $x[n]$ sol yönlü ise, ROC, en içteki sıfırdan farklı kutubun içindeki z-düzlemidir.

Örnek

$x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^{|n|}z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n}z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b^{n}z^{-n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n}z^{-n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} (bz)^n = -1 + \frac{1}{1-bz} = \frac{bz}{1-bz}, \quad |bz| < 1, \quad |z| < 1/b$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^{n}z^{-n} = \frac{1}{1-bz^{-1}}, \quad |bz^{-1}| < 1, \quad |z| > b$$

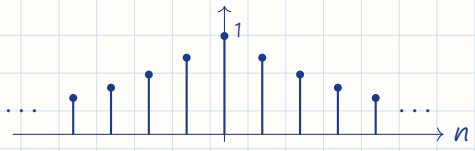
$$x[n] = b^{|n|} = b^{-n}u[-n-1] + b^{n}u[n]$$

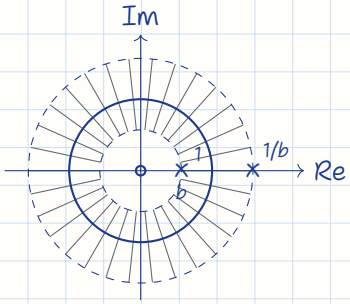
Reminder: $b^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1-bz^{-1}}, \quad |z| > b$

$b^{-n}u[n-1]$[2] $\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \dfrac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < 1/b$

$$X(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}} = \frac{b^2-1}{b} \cdot \frac{z}{(z-b)(z-b^{-1})}, \qquad b < |z| < 1/b$$

$x[n], \quad 0 < b < 1$





[2] Claude notu: muhtemelen $b^{-n}u[-n-1]$ olmalı (bir üst satırdaki ayrışımla uyumlu).

Ters z-transform

orj. s. 6

$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$$

$$x[n]r^{-n} = \mathcal{F}^{-1}\{X(re^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega}) e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^n\, d\omega$$

$$z = re^{j\omega} \longrightarrow dz = jre^{j\omega}\, d\omega = jz\, d\omega$$

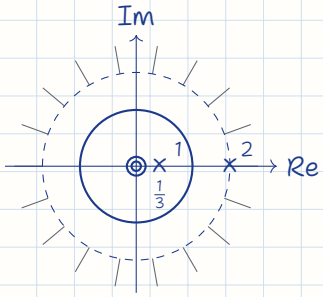
$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z) z^{n-1}\, dz$$

$\oint$: r yarıçaplı, orijin merkezli, saat yönünün tersinde kapalı dairesel bir kontur etrafında alınan integrali gösterir.

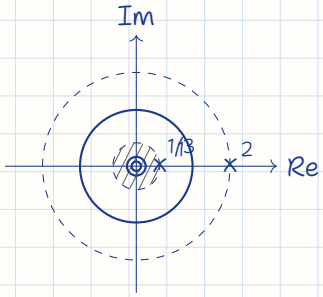
$$X(z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{1 - a_i z^{-1}} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow x[n] = A_i a_i^n u[n] \ : \text{sağ yanlı} \\ \hookrightarrow x[n] = -A_i a_i^n u[-n-1] \ : \text{sol yanlı} \end{array}$$

Örnek

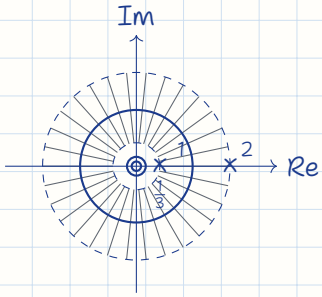
$$X(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{z^2}{(z-\frac{1}{3})(z-2)} = \frac{A}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{B}{1-2z^{-1}}, \qquad A = -1/5,\ B = 6/5$$



$x[n]$ sağ yanlı ise
$x[n] = A\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + B\,2^n u[n]$
ROC, birim çemberi içermez, FT yoktur.



$x[n]$ sol yanlı ise
$x[n] =$
$-A\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] - B\,2^n u[-n-1]$
FT yoktur.



$x[n]$ iki yanlı ise
$x[n] = A\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - B\,2^n u[-n-1]$
ROC, birim çemberi içerir, FT vardır.

Örnek

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}, \quad x[n] = ?$$

1) $|z| > 1/3$
2) $1/4 < |z| < 1/3$
3) $|z| < 1/4$

$$X(z) = \frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{z(3z - 5/6)}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{3})}$$

$\longrightarrow z = 0$ ve $z = 5/18$'da birer sıfır vardır.
$\hookrightarrow z = 1/4$ ve $z = 1/3$'de birer kutup vardır.
$\hookrightarrow A = 1,\ B = 2$

1) $|z| > \frac{1}{3}$: $x[n]$ sağ yönlü

$$x[n] = A\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + B\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

orj. s. 7

2) $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$: $x[n]$ çift yönlü

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

3) $|z| < \frac{1}{4}$: $x[n]$ sol yönlü

$$x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

Örnek

$X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1}, \quad 0 < |z| < \infty$

Reminder: $\delta[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} 1, \quad \forall z$

$\delta[n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-1}, \quad \forall z \ (z = \infty \text{ hariç})$[3]

$\delta[n+1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z, \quad \forall z \ (z = 0 \text{ hariç})$

$$x[n] = 4\delta[n+2] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1]$$

z-transformunun özellikleri

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z), \quad \text{ROC} : \mathcal{R} \qquad X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} \text{ ve } x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$$

1) **Lineerlik:** $\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \longleftrightarrow \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$, ROC: $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$
2) **Zamanda öteleme:** $x[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0}X(z)$, ROC: $\mathcal{R}$ ($z = 0$ ve $z = \infty$ eklenebilir/çıkabilir)
3) **z-domeninde ölçeklendirme:** $z_0^n x[n] \longleftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right)$, ROC: $|z_0|\mathcal{R}$
4) **Zamanda katlama:** $x[-n] \longleftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$, ROC: $\frac{1}{\mathcal{R}}$
5) **Eşlenik alma:** $x^*[n] \longleftrightarrow X^*(z^*)$, ROC: $\mathcal{R}$
6) **z-domeninde türev:** $n\,x[n] \longleftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$, ROC: $\mathcal{R}$
7) **Konvolüsyon:** $x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow X_1(z)X_2(z)$, ROC: $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \ : \text{Transfer fonksiyonu}$$

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} \ : \text{Dürtü cevabı}$$

Örnek

orj. s. 8

$X(z) = \dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|, \quad x[n] = ?$

Reminder: $a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$

$$n\,a^n u[n] \longleftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

[3] Claude notu: 4. sayfadaki örneklerle uyumlu olarak muhtemelen $\delta[n-1]$ için "$z = 0$ hariç", $\delta[n+1]$ için "$z = \infty$ hariç" olmalı.

ROC ile LTI sistemlerin özelliklerinin analizi

1) **Nedensellik:** $h[n] = 0,\ n < 0$ sağ yanlı $\longrightarrow$ ROC sağ yanlı
$H(z)$ rasyonel ise paydanın derecesi > payın derecesi olmalıdır[4] (aksi durumda $z \to \infty$, $H(z) \to \infty$ gider)

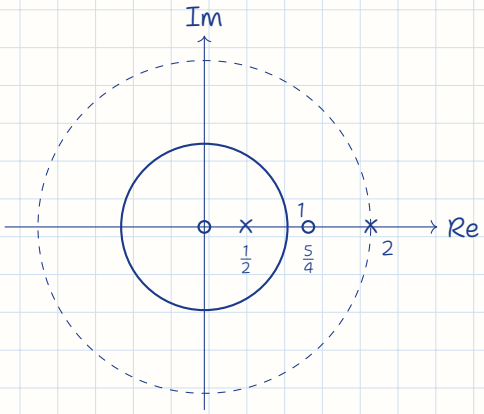
2) **Kararlılık:** $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \longrightarrow$ ROC, birim çemberi içermelidir.

Örnek

$H(z) = \dfrac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$, $h[n] = ?$, sistem özellikleri?

$$H(z) = \frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} = \frac{A}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{B}{(1 - 2z^{-1})}, \qquad A = B = 1$$

$\to$ $z = 0$ ve $z = 5/4$ birer sıfır, $z = 1/2$ ve $z = 2$ birer kutup vardır.



1) $|z| > 2$

$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[n]$ $\longrightarrow h[n] = 0,\ n < 0$ veya ROC sağ yanlı olduğundan nedensel
$\hookrightarrow$ ROC, birim çemberi içermediğinden kararlı değil.

2) $\frac{1}{2} < |z| < 2$

$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2^n u[-n-1]$ $\longrightarrow$ nedensel değil
$\hookrightarrow$ ROC, birim çemberi içerdiğinden kararlı

3) $|z| < 1/2$

$h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 2^n u[-n-1]$ $\longrightarrow$ nedensel değil
$\hookrightarrow$ kararlı değil

Örnek

orj. s. 9

$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1]$ ise $h[n] = ?$

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

[4] Claude notu: muhtemelen ≥ olmalı; dereceler eşitken de $z \to \infty$ için $H(z)$ sonlu kalır (aşağıdaki örnekte pay ve payda dereceleri eşittir ve $|z| > 2$ için sistem nedenseldir).

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z+1/3}{z-1/2} \longrightarrow z = 1/2 \text{ bir kutup vardır.}$$

$\rightarrow |z| > 1/2$

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{3}\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Reminder: $x[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0}X(z)$

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \longrightarrow$ ROC sağ yanlı ve birim çemberi içerir, nedensel ve kararlı

$\rightarrow |z| < 1/2$

$$h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n] \longrightarrow \text{nedensel değil, kararlı değil.}$$

SORU: $x(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1)$ 'in FT'nu bulunuz.

Hatırlatma: $e^{-at}u(t) \longrightarrow \frac{1}{a+j2\pi f}$

$$x(t-t_0) \longrightarrow e^{-j2\pi f t_0} \cdot X(f)$$

$$x(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1) \longrightarrow e^{-j2\pi f}\frac{1}{2+j2\pi f}$$

SORU: $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$ 'in FT'nu bulunuz.

Hatırlatma: $a^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-a\cdot e^{-j\omega}}$

$$x[n-n_0] \longrightarrow e^{-j\omega n_0} \cdot X(e^{j\omega})$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1] \longrightarrow e^{-j\omega}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

orj. s. 10

SORU: $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$

Hatırlatma: $\delta[n] \longrightarrow 1$

$$x[n-n_0] \longrightarrow e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

$$x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1] \longrightarrow X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} + e^{j\omega} = 2\cdot\cos(\omega)$$

SORU: Fark denklemi: $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$ olarak verilen LTI sistemin transfer fonksiyonu $H(e^{j\omega})$'yı bulun.

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}\cdot e^{-j\omega}\cdot Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - 2\cdot e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) + e^{-j2\omega}X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega})\left[1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right] = X(e^{j\omega})\left[1-2\cdot e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}\right]$$

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{1-2e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

1) $h[n] = \delta[n] - \delta[n+1]$ ise sistemin birim basamak cevabı nedir?

$$y[n] = h[n]*x[n] = (\delta[n]-\delta[n+1])*u[n] = u[n]*\delta[n]-u[n]*\delta[n+1] = u[n]-u[n+1] = -\delta[n+1]$$

2) $N_0 = 5$, $x[n] = \sin(3\omega_0 n)$, $k = 2$ için FS katsayılarını bulunuz.

$$x[n] = \frac{1}{2j}e^{j3\omega_0 n} - \frac{1}{2j}e^{-j3\omega_0 n}$$

$$x_3 = \frac{1}{2j} = -j/2 \qquad x_{-3} = -\frac{1}{2j} = j/2$$

$$x_k = x_{k+N_0} \quad \begin{matrix} \longrightarrow x_3 = x_8 = x_{13} = \cdots \\ \hookrightarrow x_{-3} = x_2 = x_7 = \cdots \end{matrix}$$

3) $x(t) = e^{-j2\pi f_0 t}$, $X(f) = ?$

$$\text{Reminder: } 1 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \delta(f)$$

$$e^{\mp j2\pi f_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \delta(f \pm f_0)$$

$$X(f) = \delta(f + f_0)$$

orj. s. 11

4) $x(t) = 2e^{j\pi/2}\sin(2\omega_0 t)$, $X(f) = ?$

$$x(t) = 2j\left[\frac{1}{2j}e^{j2\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j2\omega_0 t}\right]$$

$$\Big\updownarrow \mathcal{F}$$

$$X(f) = \delta(f - 2f_0) - \delta(f + 2f_0)$$

5) $x[n] = e^{j5\pi/2}\sin(3\omega_0 n)$, $X(e^{j\omega}) = ?$

$$x[n] = j\left[\frac{1}{2j}e^{j3\omega_0 n} - \frac{1}{2j}e^{-j3\omega_0 n}\right]$$

$$\text{Reminder: } x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} x_k e^{jk\omega_0 n} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi x_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

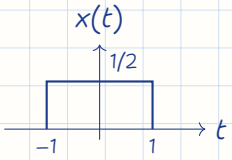
$$X(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega - 3\omega_0) - \pi\delta(\omega + 3\omega_0), \qquad -\pi \le \omega \le \pi$$

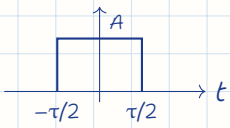
6) $N_0 = 2$, $x[n] - x[n-1]$ ifadesinin FS katsayısını bulunuz.

$$\left.\begin{matrix} x[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} x_k \\ x[n-1] \overset{FS}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0}x_k \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} x[n] - x[n-1] \overset{FS}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-jk\omega_0})x_k = 2x_k \\ \omega_0 = \dfrac{2\pi}{N_0} = \pi \\ e^{-jk\pi} = \cos(k\pi) - j\sin(k\pi) = -1^{5} \end{matrix}$$

7) $x(t) = \frac{1}{2}\left[u(t+1) - u(t-1)\right]$

$$\text{Reminder: } A\Pi(t/\tau) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} A\tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)$$





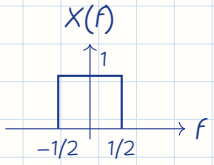
$$x(t) = \frac{1}{2}\Pi(t/2) \underset{A=1/2,\ \tau=2}{\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}} X(f) = \mathrm{sinc}(2f)$$

[5] Claude notu: $\cos(k\pi) = (-1)^k$ olduğundan bu eşitlik yalnızca tek k için geçerlidir; genel olarak katsayı $(1 - (-1)^k)x_k$ olur (çift k için 0, tek k için $2x_k$).

8) $x(t) = \text{sinc}(t)$ işaretinin enerjisini ve gücünü bulunuz.

Reminder: $\left.\begin{array}{l} x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f) \\ X(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} x(-f) \end{array}\right\}$ Duality

$$x(t) = \text{sinc}(t) \underset{A=\tau=1}{\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}} X(f) = \Pi(f)$$



Reminder: $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df$

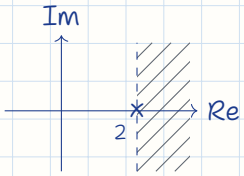
$E_x = \int_{-1/2}^{1/2} 1\, df = 1 < \infty$ olduğundan $x(t) = \text{sinc}(t)$ enerji işaretidir, $P_x = 0$'dır.

orj. s. 12

9) $h(t) = e^{2t}u(t)$, Kararlılık ve nedensellik?

Reminder: $e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{s+a}$, $\text{Re}\{s\} > -a$

$H(s) = \dfrac{1}{s-2}$, $\text{Re}\{s\} > 2$

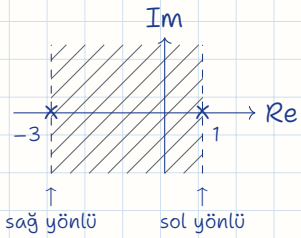


ROC sağ yönlü : Nedensel
ROC jω eksenini içermez : Kararlı değil

10) 1 ve −3'te kutupları olan çift yönlü $x(t) = ?$

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3}, \qquad A = -B = 1/4$$

$\updownarrow \mathcal{L}^{-1}$



$$x(t) = -Ae^{-t}u(-t) + Be^{-3t}u(t) = \frac{-1}{4}\left(e^{-t}u(-t) + e^{-3t}u(t)\right)^{6}$$

[6] Claude notu: $s = 1$ kutbuna karşılık gelen sol yönlü terim $-Ae^{t}u(-t)$'dir; muhtemelen e^{-t} yerine e^{t} olmalı.