İşaretler ve Sistemler

Ders 2 – Birim dürtü ve birim basamak fonksiyonları, sistem özellikleri

Orijinal not: Isaret-ve-Sistemler-ders-2.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

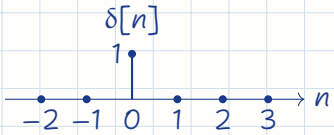
Birim Dürtü ve Birim Basamak Fonksiyonları

orj. s. 1

(Unit Impulse and Unit Step Functions)

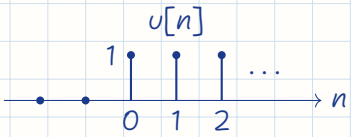
Ayrık zamanlı birim dürtü işareti:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



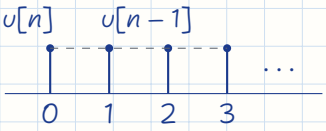
Ayrık zamanlı birim basamak işareti:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

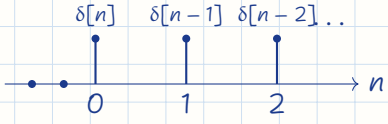


⇒ Birim dürtü ve birim basamak fonksiyonları arasındaki ilişki

! $* \ \delta[n] = u[n] - u[n-1]$



▶ $* \ u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots$

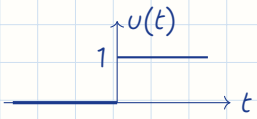


⇒ Birim dürtü işaretinin örnekleme özelliği

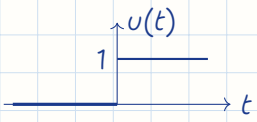
$$x[n]\,\delta[n] = x[0]\,\delta[n]$$
$$x[n]\,\delta[n-n_0] = x[n_0]\,\delta[n-n_0]$$

Sürekli zamanlı birim basamak işareti:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

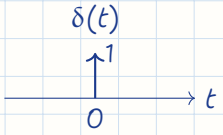


Lathi: $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$



Sürekli zamanlı birim dürtü işareti:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$



Sürekli zamanlı birim dürtü işareti, $t = 0$ iken ∞'a giden ve alanı 1'e eşit olan bir fonksiyondur.

$$* \; u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

$$* \; \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$* \; x(t)\,\delta(t) = x(0)\,\delta(t)$$

$$x(t)\,\delta(t - t_0) = x(t_0)\,\delta(t - t_0)$$

$* \; x(t)$, $t = t_0$'da sürekli olmak üzere

$$\int_a^b x(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = \begin{cases} x(t_0), & a < t_0 < b \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$* \; \delta(at) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t), \quad \forall a \neq 0$$

$a = -1$ için $\delta(-t) = \delta(t)$: Çift fonksiyon

Örnek (Ex)

$x(t) = \delta(t + 2) - \delta(t - 2)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau, \qquad E_y = ? \quad P_y = ?$$

Çözüm:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} [\delta(\tau + 2) - \delta(\tau - 2)]\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau + 2)\,d\tau - \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - 2)\,d\tau = u(t + 2) - u(t - 2)$$

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < -2 \\ 1, & -2 \leq t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\,dt = \int_{-2}^{2} 1 \cdot dt = 4$$

$$P_y = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |y(t)|^2\,dt = 0$$

Örnek (Ex)

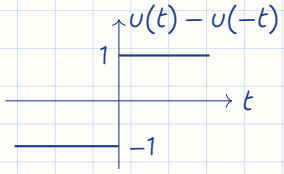
orj. s. 3

$x(t) = \text{Even}\{\sin(4\pi t)\,u(t)\}$ Periyodik midir?

Çözüm: Reminder: $\text{Even}\{x(t)\} = x_e(t) = \dfrac{x(t)+x(-t)}{2}$

$$x(t) = \frac{\sin(4\pi t)\,u(t) + \sin(-4\pi t)\,u(-t)}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin(4\pi t)\,u(t) - \sin(4\pi t)\,u(-t)\right]$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin(4\pi t)\left[u(t) - u(-t)\right]$$



$$u(t)-u(-t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ -1, & t<0 \\ 0, & t=0 \end{cases} = \text{sgn}(t) \quad \text{işaret fonksiyonu}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin(4\pi t)\,\text{sgn}(t) \qquad \text{Nonperiodic}$$

Örnek

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$, $E_x = ?$, $P_x = ?$, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

Çözüm:

$$E_x = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} A^2\cos^2(\omega_0 t+\theta)\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{A^2}{2}\left[1+\cos(2\omega_0 t+2\theta)\right]dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2}\left[t + \frac{\sin(2\omega_0 t+2\theta)}{2\omega_0}\right]\Bigg|_{-T}^{T}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2}\left[2T + \frac{1}{2\omega_0}\Big(\sin(2\omega_0 T+2\theta) - \sin(-2\omega_0 T+2\theta)\Big)\right] \longrightarrow \infty$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{A^2}{2}\left[2T + \frac{T}{4\pi}\underbrace{\Big(\underbrace{\sin(4\pi+2\theta)}_{\sin 2\theta} - \underbrace{\sin(-4\pi+2\theta)}_{\sin 2\theta}\Big)}_{=0}\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2} = \frac{A^2}{2}$$

* Periyodik işaretler güç işaretidir $(0 < P_x < \infty,\ E_x \to \infty)$.

orj. s. 4

Sistem: Girişine uygulanan işarete karşılık çıkışında uygun bir işaret üreten düzenektir.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow y(t) = T[x(t)]$$

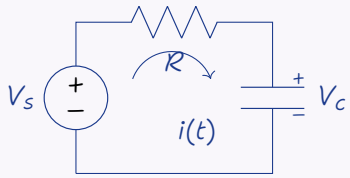
Sürekli zamanlı sistem: Giriş ve çıkış işaretlerinin her ikisi de sürekli zamanlıdır.



Ayrık zamanlı sistem: Giriş, çıkış işaretlerinin her ikisi de ayrık zamanlıdır.



Örnek (Ex)



$V_c(t)$: çıkış işareti
$V_s(t)$: giriş işareti

$$i(t) = \frac{V_s(t) - V_c(t)}{R} = \frac{1}{C}\frac{dV_c(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_c(t) = \frac{1}{RC}V_s(t)$$ [1]

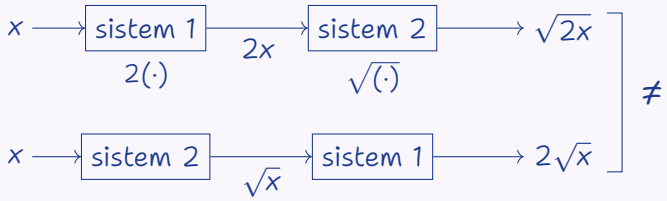
⇒ Sistemlerin birbirine bağlanması

* **Seri** (series or cascade) bağlama

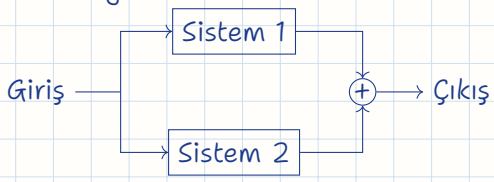


Seri bağlı sistemlerde sistemlerin bağlanma sırası önemlidir.

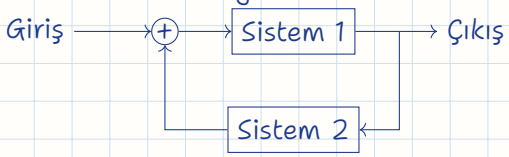
Örnek (Ex)



* **Paralel** bağlama



* **Geri besleme** ile bağlama



Sistem Özellikleri (System Properties)

orj. s. 5

Sistemlerin Sınıflandırılması (classification of systems)

1) Hafızaya sahip olan ve olmayan sistemler:

(System with and without memory)

Instantaneous (memoryless) and dynamic (with memory) systems

[1] Claude notu: muhtemelen $i(t) = C\frac{dV_c(t)}{dt}$ olmalı ($\frac{1}{C}$ değil); son diferansiyel denklem doğru.

Hafızası olmayan sistem: Bir sistemin herhangi bir zamandaki çıktısı her bağımsız değişkenin sadece o andaki girdisine bağlıdır.

Örnek (Ex)

$$y[n] = (x[n] - x^2[n])^2 \quad \text{: memoryless}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \quad \text{: memory}$$

$$y[n] = x[n-1] \quad \text{: memory}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \quad \text{: memory}$$

$$y(t) = 2x(t) + x^3(t) \quad \text{: memoryless}$$

2) Tersinir ve tersinir olmayan sistemler:

(Invertible and noninvertible systems)

Tersinir sistem: Çıktısı verilen bir sistemin özgün girdisi bulunabiliyorsa bu sistem tersinirdir. Bir sistem farklı girdiler için farklı çıktılar üretebiliyor ise tersinirdir.

$$\underset{x[n]}{x(t)} \longrightarrow \boxed{\underset{A}{\text{System}}} \xrightarrow{\underset{y[n]}{y(t)}} \boxed{\underset{A^{-1}}{\text{Inverse System}}} \longrightarrow \begin{matrix} w(t) = x(t) \\ w[n] = x[n] \end{matrix}$$

Örnek (Ex)

$y(t) = 2x(t)$ sistemi tersinir midir?

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\overset{2(\cdot)}{\text{Sistem } A}} \longrightarrow y(t) = 2x(t) \longrightarrow \boxed{\overset{\frac{1}{2}(\cdot)}{\text{Sistem } A^{-1}}} \longrightarrow w(t) = x(t)$$

Sistem A: $y(t) = 2x(t)$

Sistem A^{-1}: $w(t) = \frac{1}{2}y(t) = x(t)$ Invertible

Örnek (Ex)

Sistem A: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ (integrator)

$$A^{-1}: \; w(t) = \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \quad \text{(differentiator)} \quad \text{Invertible}$$

Örnek (Ex)

System A: $y(t) = x^2(t)$

$$w(t) = \sqrt{y(t)} = |x(t)| \neq x(t) \quad \text{Noninvertible}$$

3) Nedensel ve nedensel olmayan sistemler:

(Causal and noncausal systems)

orj. s. 6

Nedensel sistem: Bir sistemin herhangi bir andaki çıktısı, sadece o andaki ve geçmişteki girdilerine bağlı ise nedenseldir.

Sistemin çıktısı girişin gelecekteki değerlerine bağlı değildir.

⇒ Bir sistemin fiziki olarak gerçeklenebilmesi için nedensel olması gerekir.

Nedensel olmayan sistemler işaretlerin gerçek zamanlı olarak işlenmediği durumlarda ortaya çıkar.

$$y(t_0) = T[x(t);\ t \le t_0] \ : \text{Causal}$$

Örnek (Ex)

$$y(t) = x(t) - x(t-3) \quad : \text{Causal}$$
$$y[n] = \frac{1}{3}[x[n-1] + x[n] + x[n+1]] \quad : \text{Noncausal}$$
$$y[n] = x[-n] \quad : \text{Noncausal}$$
$$y(t) = x(t)\cos(t+1) \quad : \text{Causal}$$

4) Kararlı ve kararlı olmayan sistemler:

(Stable and nonstable systems)

Kararlı sistem: Bir sistem sonlu bir girdi için sonlu bir çıkış üretiyorsa kararlıdır.

$$|x(t)| \le M_x < \infty \longrightarrow \boxed{\text{Sistem}} \longrightarrow |y(t)| \le M_y < \infty$$

Örnek (Ex)

$y(t) = x^2(t)$

$$|x(t)| \le M_x < \infty$$
$$|y(t)| = |x^2(t)| = |x(t)|^2 \le M_x^2 < \infty \quad \text{Stable}$$

Örnek (Ex)

$y(t) = t\,x(t)$

$$|y(t)| = t\,|x(t)| \le t\,M_x \qquad t \to \infty \quad y(t) \to \infty \quad \text{Unstable}$$

Örnek (Ex)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \ : \text{Unstable}$$

5) Zamanla değişen ve değişmeyen sistemler:

orj. s. 7

(Time-varying and time-invariant systems)

Zamanla değişmeyen sistem: Giriş çıkış ilişkisi zamanla değişmeyen sistemler olup aynı giriş işareti farklı zamanlarda uygulandığında aynı çıkış işaretinin zamanda kaymış versiyonlarını üretir.

$$T[x(t)] = y(t)$$
$$T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)\ ;\ \forall t_0,\ x(t) \qquad \text{Time-Invariant}$$
$$x[n] \longrightarrow y[n]$$
$$x[n-n_0] \longrightarrow y[n-n_0]\ ;\ \forall n_0,\ x[n]$$

Örnek (Ex)

$y(t) = \sin(x(t))$

$$T[x(t-t_0)] \stackrel{?}{=} y(t-t_0)$$
$$T[x(t-t_0)] = \sin(x(t-t_0)) = y(t-t_0) \qquad \text{Time-Invariant}$$

Örnek (Ex)

$y(t) = x(t)\sin(t)$

$$\left.\begin{aligned} T[x(t-t_0)] &= x(t-t_0)\sin(t) \\ y(t-t_0) &= x(t-t_0)\sin(t-t_0) \end{aligned}\right] \neq \quad \text{Time-variant}$$

6) Doğrusal ve doğrusal olmayan sistemler:

(Linear and nonlinear systems)

Doğrusal sistem: Sistemin birkaç giriş işaretinin lineer kombinasyonuna cevabı, o işaretlere cevabının lineer kombinasyonu ise doğrusaldır.

$$y_1(t) = T[x_1(t)]$$
$$y_2(t) = T[x_2(t)]$$
$$T[ax_1(t) + bx_2(t)] = a\,T[x_1(t)] + b\,T[x_2(t)] = a\,y_1(t) + b\,y_2(t) \qquad \text{Lineer}$$

Örnek (Ex)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

$$T[ax_1(t)+bx_2(t)] = \int_{-\infty}^{t} (ax_1(\tau)+bx_2(\tau))\,d\tau = a\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\,d\tau + b\int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)\,d\tau = \underbrace{a\,y_1(t) + b\,y_2(t)}_{\text{Linear}}$$

Örnek (Ex)

$y(t) = x^2(t)$

$$\left.\begin{aligned} T[ax_1(t) + bx_2(t)] &= (ax_1(t) + bx_2(t))^2 = a^2x_1^2(t) + b^2x_2^2(t) + 2ab\,x_1(t)\,x_2(t) \\ &= a^2y_1(t) + b^2y_2(t) + 2ab\,x_1(t)\,x_2(t) \\ &\quad a\,y_1(t) + b\,y_2(t) \end{aligned}\right] \neq \quad \text{Nonlinear}$$

Örnek (Ex)

orj. s. 8

$y[n] = 2x[n] + 3$ $\qquad y_1 = 2x_1 + 3,\ y_2 = 2x_2 + 3$

$$T[ax_1[n] + bx_2[n]] = 2\{ax_1[n] + bx_2[n]\} + 3 = 2a\,x_1[n] + 2b\,x_2[n] + 3$$
$$\left.\begin{aligned} &= a\,y_1[n] + b\,y_2[n] + 3 \\ &\quad a\,y_1[n] + b\,y_2[n] \end{aligned}\right] \neq \quad \text{Nonlinear}^2$$

[2] Claude notu: orijinalde "+3" turuncu kalemle işaretlenmiş; $y_i[n] = 2x_i[n] + 3$ ile doğrusu $2a\,x_1[n] + 2b\,x_2[n] + 3 = a\,y_1[n] + b\,y_2[n] + 3(1-a-b)$ olmalı. Sonuç (nonlinear) değişmez.

$\Rightarrow$ Doğrusal sistemler sıfır girdi için sıfır çıktı özelliğine sahiptirler.

$$y[n] = 2x[n] \longrightarrow x[n] = 0 \quad y[n] = 0$$
$$y[n] = 2x[n] + 3 \longrightarrow x[n] = 0 \quad y[n] = 3 = y_0[n] \text{ : Sıfır girdi çıktısı}$$

Örnek (Ex)

$$y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-2), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$ özelliklerini inceleyiniz.

Çözüm:

1) Memory $y(t) = x(t) + x(t-2)$, t'inci andaki çıkış t ve $t-2$'inci anlardaki girişe bağlı olduğundan hafızalıdır.
2) Noninvertible
3) Causal, $y(t) = x(t) + x(t-2)$, $t \geq 0$ Çıkış, girişin gelecek değerlerine bağlı olmadığından nedenseldir.
4) Stable, $|x(t)| \leq M_x < \infty$
$$|y(t)| = |x(t)| + |x(t-2)| \leq M_y < \infty$$
5) Time-Invariant
$$T[x(t-t_0)] \stackrel{?}{=} y(t-t_0)$$
$$T[x(t-t_0)] = x(t-t_0) + x(t-t_0-2) = y(t-t_0)$$
6) Linear[3]
$$T[ax_1(t) + bx_2(t)] \stackrel{?}{=} a\,y_1(t) + b\,y_2(t)$$
$$T[ax_1(t) + bx_2(t)] = ax_1(t) + bx_2(t) + ax_1(t-t_0) + bx_2(t-t_0)$$
$$= a(x_1(t) + x_1(t-t_0)) + b(x_2(t) + x_2(t-t_0)) = a\,y_1(t) + b\,y_2(t)$$

[3] Claude notu: muhtemelen $t-t_0$ yerine $t-2$ olmalı (sistem $y(t) = x(t) + x(t-2)$).