İşaretler ve Sistemler

Ders 4 – LTI sistemlerin özellikleri, birim basamak cevabı

Orijinal not: Isaret-ve-Sistemler-ders-4.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

3) Nedensel ve nedensel olmayan LTI sistemler

orj. s. 1

(Causal and noncausal LTI systems)

Reminder: Bir sistemin herhangi bir zamandaki çıktısı girdinin gelecek değerlerine bağlı değilse nedenseldir.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$$

$$= \cdots + h[0]\,x[n] + \underbrace{h[-1]\,x[n+1] + h[-2]\,x[n+2] + \cdots}_{\text{Nedensel olması için } n<0 \text{ iken } h[n]=0 \text{ olmalı}}$$

Nedensel: $h[n] = 0,\ n < 0$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\,h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$$

$\Rightarrow$ Bir LTI sistem nedensel ise, bu sistemin dürtü cevabı dürtü uygulanmadan önce sıfır olmalıdır.

$$h(t) = 0,\ t < 0$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$

4) Kararlı ve kararlı olmayan LTI sistemler

(Stable and nonstable LTI systems)

Reminder: $|x(t)| \le M_x < \infty \longrightarrow |y(t)| \le M_y < \infty$ ise kararlıdır.

$$|x[n]| \le M_x < \infty,\ \forall n$$

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|\,|x[n-k]| \le M_x \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|}_{<\infty \text{ olmalı}},\quad \forall n$$

Kararlı: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty$

Örnek (Ex)

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ kararlı mıdır?

u[n-k]
n-k>0
n>k

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] \longleftarrow h[n] = u[n]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} u[k] \to \infty \quad \text{Kararsızdır.}$$

Örnek (Ex)

$h(t) = \delta(t - t_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\delta(t - t_0)|\, dt = 1 < \infty \quad \text{Kararlı}$$

Birim basamak cevabı (unit step response):

Bir LTI sistemin birim basamak cevabı $s[n]/s(t)$, sisteme birim basamak işareti $u[n]/u(t)$ uygulandığında elde edilen çıktıdır.

$$\begin{matrix} x(t) = u(t) \\ x[n] = u[n] \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ h[n] \end{matrix}} \longrightarrow \begin{matrix} y(t) = s(t) = u(t) * h(t) \\ y[n] = s[n] = u[n] * h[n] \end{matrix}$$

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau \longrightarrow h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)$$

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \longrightarrow h[n] = s[n] - s[n-1]$$

Nedensel LTI Sistemlerin Türev/Fark Denklemleri ile Tanımlanması:

orj. s. 2

Sürekli zamanlı nedensel LTI sistemler lineer sabit katsayılı türev denklemleri ile ifade edilebilir.

– RC devresi

Ayrık zamanlı nedensel LTI sistemler lineer sabit katsayılı fark denklemleri ile ifade edilebilir.

– Farklı prosedürlerin sıralı davranışları

Lineer sabit katsayılı Türev denklemleri:

(Linear constant-coefficient differential equations)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad : \text{Nth-order linear constant-coeff. diff. eq.}$$

Order (mertebe): Çıkış işareti $y(t)$'nin en yüksek türevinin derecesidir.

$$N = 0 \Rightarrow y(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$N \geq 1 \Rightarrow y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

$y_p(t)$: özel çözüm (particular solution) giriş işaretine bağlı olarak elde edilir
$y_h(t)$: homojen çözüm (homogeneous solution) başlangıç değerlerine (initial conditions) göre elde edilir.

Doğal çözüm (natural response)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \quad : \text{Homojen çözüm için bu eşitliğin çözülmesi gerekir.}$$

Nedensel LTI sistemlerin durgun olma koşulu (giriş sıfır olduğu süre çıkışta sıfırdır) kullanılarak giriş ve çıkışın sıfırdan farklı olduğu ilk zaman başlangıç noktası olarak alınır.

$$x(t) = 0,\ t \leq t_0 \ \text{iken} \ y(t) = 0,\ t \leq t_0$$

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \frac{d^2 y(t_0)}{dt^2} = \cdots = \frac{d^{N-1} y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

Örnek (Ex)

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t), \quad x(t) = Ke^{3t}u(t), \quad y(t) = ?$$

Çözüm:

$$y(t) = \underbrace{y_p(t)}_{\text{özel çözüm (girişe bağlı)}} + \underbrace{y_h(t)}_{\text{homojen/doğal çözüm (başlangıç koşullarına bağlı)}}$$

$\Rightarrow$ Özel çözüm $y_p(t) = Ye^{3t}u(t)$ yada $y_p(t) = Ye^{3t},\ t > 0$ olarak seçilir.

Not: Üstel formlu bir giriş işareti için özel çözüm yine üstel formlu bir işarettir.

$$3Ye^{3t} + 2Ye^{3t} = Ke^{3t} \longrightarrow 5Y = K \rightarrow Y = \frac{K}{5} \iff \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$y_p(t) = \frac{K}{5} e^{3t} u(t)$$

orj. s. 3

$\Rightarrow$ Homojen çözüm $y_h(t) = Ae^{st}$ olarak seçilir.

$$Ase^{st} + 2Ae^{st} = 0 \longrightarrow Ae^{st}(s + 2) = 0 \longrightarrow s = -2 \iff \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

$$y_h(t) = Ae^{-2t}$$

$A = ?$ $\rightarrow$ Durgun olma koşulu / başlangıç değerinden bulunur.

$t > 0$ için tanımlı

$x(t) = 0,\ t \leq 0$ iken $y(t) = 0,\ t \leq 0$ ise $y(0) = 0$

$\Rightarrow$ Genel çözüm $y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \frac{K}{5}e^{3t} + Ae^{-2t}, \quad t > 0$

$$y(0) = \frac{K}{5} + A = 0 \Rightarrow A = -\frac{K}{5}$$

$$y(t) = \frac{K}{5}\left[e^{3t} - e^{-2t}\right]u(t) \quad \text{yada} \quad y(t) = \begin{cases} \frac{K}{5}\left[e^{3t} - e^{-2t}\right], & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

Lineer sabit katsayılı fark denklemleri:

(Linear constant-coefficient difference equations)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] \;:\; \text{Nth-order linear const.-coeff. difference eq.} \qquad (1)$$

$$y[n] = \underbrace{y_p[n]}_{\text{özel çözüm}} + \underbrace{y_h[n]}_{\text{homojen çözüm}} \qquad \sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = 0$$

Başlangıç koşulları (nedensel LTI durağanlık koşulu): $x[n] = 0,\ n < n_0$ ise $y[n] = 0,\ n < n_0$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k]\right] \qquad (2)$$

(1) ve (2) bağıntıları özyinelemeli (recursive) ifadelerdir (n. andaki çıkış, kendinden önceki çıkış değerlerine bağlı olduğundan)

$\Rightarrow N = 0$ iken

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0}\, x[n-k] \;:\; \text{non-recursive}$$

($y[n]$ doğrudan giriş ve girişin önceki değerlerinden hesaplanabilir, kendinin önceki değerlerine 'başlangıç koşullarına' ihtiyaç duymaz)

Dürtü cevabı (impulse response)

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{dışında} \end{cases} \qquad \Longleftarrow \quad y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$$

$N = 0$ iken elde edilen dürtü cevabı sonlu bir zaman aralığında sıfırdan farklı olduğundan $y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$ sistemi sonlu dürtü tepkili (finite impulse response, FIR) olarak isimlendirilir.

orj. s. 4

$\Rightarrow N \ge 1$ için $y[n] = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k]\right]$ fark denklemi ile verilen sistemin çözümü $y[n] = y_p[n] + y_h[n]$ şeklinde elde edilir ve başlangıç değerlerine ihtiyaç duyar. Bu sistemin dürtü cevabı sonsuz zaman aralığında sıfırdan farklı olduğundan, sistem sonsuz dürtü tepkili (infinite impulse response, IIR) olarak isimlendirilir.

Örnek (Ex)

$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n], \quad x[n] = K\delta[n], \quad y[n] = ?$

Çözüm:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] \quad \longleftarrow \quad x[n] = 0,\ n \le -1 \ \text{iken} \ y[n] = 0,\ n \le -1$$

$$y[-1] = x[-1] + \tfrac{1}{2}y[-2] = 0$$
$$y[0] = x[0] + \tfrac{1}{2}y[-1] = K\delta[0] + \tfrac{1}{2}y[-1] = K \quad (\delta[0] \to 1,\ y[-1] \to 0)$$
$$y[1] = x[1] + \tfrac{1}{2}y[0] = \tfrac{1}{2}K \quad (x[1] \to 0)$$
$$y[2] = x[2] + \tfrac{1}{2}y[1] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 K$$
$$y[3] = x[3] + \tfrac{1}{2}y[2] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 K$$
$$\vdots$$
$$y[n] = x[n] + \tfrac{1}{2}y[n-1] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n K$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad K = 1 \ \text{iken} \quad (\text{IIR})$$

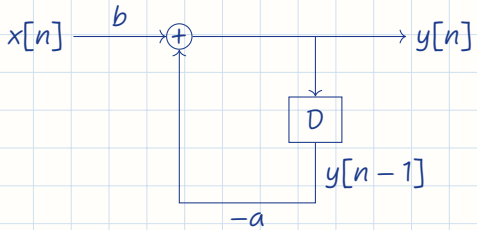
⇒ Birinci dereceden fark denklemi ile tanımlanmış sistemlerin blok diyagramı ile gösterilimi



Delay (gecikme)

Gecikme, bellek elemanına karşılık gelir, ve girişin bir önceki değerini tutar. Nedensel LTI sistemlerde olduğu gibi durağan olma koşulu uygulanırsa bellek elemanında depolanan başlangıç değeri sıfırdır.

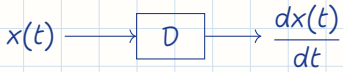
$$y[n] + a\,y[n-1] = b\,x[n]$$
$$\hookrightarrow y[n] = b\,x[n] - a\,y[n-1]$$



orj. s. 5

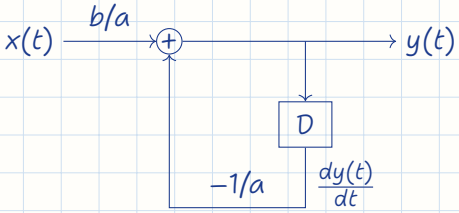
⇒ Birinci dereceden türev denklemi ile tanımlanmış sistemlerin blok diyagramı ile gösterilimi

$$\frac{dy(t)}{dt} + a\,y(t) = b\,x(t)$$



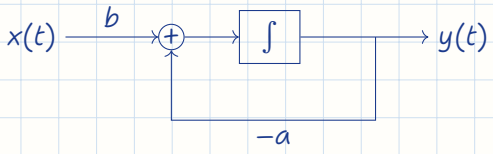
differentiator
(Türev alıcı)

$$y(t) = \frac{b}{a}x(t) - \frac{1}{a}\frac{dy(t)}{dt}$$



Türev alıcıların pratik gerçeklemesi zor olduğundan alternatif bir gösterilime gidilir:

$$\frac{dy(t)}{dt} = b\,x(t) - a\,y(t) \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[b\,x(\tau) - a\,y(\tau)\right] d\tau$$



$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[b\,x(\tau) - a\,y(\tau)\right] d\tau$$

Burada, integral alıcı $y(t_0)$'daki başlangıç değerini belleğinde tutar.

Örnek (Ex)

$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n], \quad x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n], \quad y[n] = ?$

Çözüm:

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n]$$

$y_p[n] = A\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ olsun.

$$A\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}A\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow A - \frac{3A}{2} = 1 \rightarrow A = -2$$

$$y_p[n] = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0$$

$y_h[n] = B\alpha^n$ olsun. $y[n] - y[n-1] = 0$[1]

$$B\alpha^n - \frac{1}{2}B\alpha^{n-1} = 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$y_h[n] = B\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$y[n] = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n + B\left(\frac{1}{2}\right)^n, \; n \geq 0 \qquad y[0] = 1 \longleftarrow \begin{matrix} y[0] - y[-1] = x[0] = 1 \\ x[n] = 0,\; n \leq -1,\; y[n] = 0,\; n \leq -1 \end{matrix}$$

$$1 = -2 + B \rightarrow B = 3$$

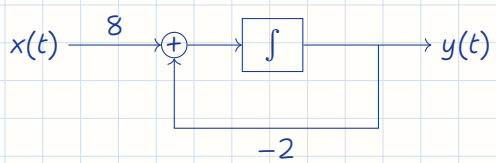
Örnek (Ex)

orj. s. 6

$y(t) = -\frac{1}{2}\frac{dy(t)}{dt} + 4x(t)$ Blok diyagramını çiziniz.

Çözüm:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t) + 8x(t) \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[8x(\tau) - 2y(\tau)\right] d\tau$$

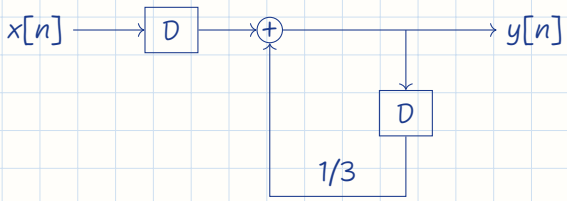


[1] Claude notu: muhtemelen $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 0$ olmalı (hemen altındaki satırda da böyle kullanılmış); aynı şekilde $y[0] - \frac{1}{2}y[-1] = x[0]$. Sonuç değişmez.

Örnek (Ex)

$y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + x[n-1]$ Blok diyagramını çiziniz.

Çözüm:



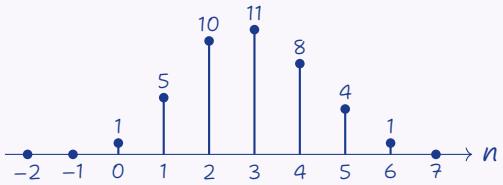
Örnek (Ex)

$x[n] \rightarrow h_1[n] \rightarrow h_2[n] \rightarrow h_2[n] \rightarrow y[n]$

Cascade interconnection of three causal LTI systems

$h_2[n] = u[n] - u[n-2]$

Overall impulse response



$h_1[n] = ?$, $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ için $y[n] = ?$

Çözüm:

$$x[n] \rightarrow h[n] \rightarrow y[n]$$

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] * h_2[n]$$

Reminder: $u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$

$$h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \qquad \boxed{d[n]+d[n-1]}$$

$$h_2[n] * h_2[n] = \delta[n] + 2\,\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

$$h_1[n] * h_2[n] * h_2[n] = h_1[n] + 2h_1[n-1] + h_1[n-2] = h[n]$$

$h[0] = h_1[0] + 2h_1[-1] + h_1[-2]$ $\rightarrow h_1[0] = 1$ (↙0, ↙0)

$h[1] = h_1[1] + 2h_1[0] + h_1[-1]$ $\rightarrow h_1[1] = 3$ (↙0)

$h[2] = h_1[2] + 2h_1[1] + h_1[0]$ $\rightarrow h_1[2] = 3$

$h_1[3] = 2$

$h_1[4] = 1$

$h_1[5] = 0$

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] - h[n-1]$$