İşaretler ve Sistemler

Uygulama notları – Fourier serisi ve Fourier dönüşümü (sayfa 22–41)

Orijinal not: isaretler-uygulama.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 22

$$x_k = 1\int_0^1 (1-t)\cdot e^{-jk2\pi t}\,dt = \underbrace{\int_0^1 e^{-jk2\pi t}\,dt}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 t\cdot e^{-jk2\pi t}\,dt}_{I_2} = I_1 - I_2 \;\checkmark$$

$$\int e^{-at}\,dt = -\frac{1}{a}e^{-at}$$

$$I_1 = \int_0^1 e^{-jk2\pi t}\,dt = \frac{-1}{jk2\pi}e^{-jk2\pi t}\Big|_0^1 = \frac{-1}{jk2\pi}\left[e^{-j2\pi k}-1\right] = \frac{1}{j2\pi k}\left(1-e^{-j2\pi k}\right)\;\checkmark$$

$$I_2 = \int_0^1 t\cdot e^{-jk2\pi t}\,dt$$

Kısmi integrasyon: $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$

$$u = t \qquad e^{-jk2\pi t}\,dt = dv$$

$$du = du^{1} \qquad \frac{-1}{jk2\pi}e^{-jk2\pi t} = v$$

$$I_2 = t\cdot\frac{-1}{jk2\pi}e^{-jk2\pi t}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{jk2\pi}e^{-jk2\pi t}\,dt$$

$$= \frac{-1}{jk2\pi}e^{-jk2\pi} - 0 + \frac{1}{jk2\pi}\cdot\underbrace{\frac{-1}{jk2\pi}\cdot e^{-jk2\pi t}\Big|_0^1}_{\frac{1}{j2\pi k}\left(1-e^{-j2\pi k}\right)}$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{j2\pi k}\cdot e^{-jk2\pi t}}\;{}^{2}$$

orj. s. 23

(Claude notu: bu sayfanın üst kısmı s. 22 ile aynıdır; yalnızca yeni eklenen satırlar aktarıldı. I_2 içinde u, v, du, dv kısımları pembe kalemle işaretlenmiş.)

$$= \frac{-1}{j2\pi k}\cdot e^{-j2\pi k} + \frac{1}{j^2(2\pi k)^2}\cdot\left(1-e^{-j2\pi k}\right)$$

$$x_k = I_1 - I_2 = \frac{1}{j2\pi k} - \cancel{\frac{1}{j2\pi k}e^{-j2\pi k}} + \cancel{\frac{1}{j2\pi k}e^{-j2\pi k}} + \frac{1}{(2\pi k)^2}\left(1-\underbrace{e^{-j2\pi k}}_{=1}\right) = \frac{1}{j2\pi k} \;\nearrow\; \text{(kutudaki } x(t)\text{)}$$

[1] Claude notu: $du = dt$ olmalı; s. 23'te öğrenci tarafından $du = dt$ olarak düzeltilmiş.

[2] Claude notu: sentez denkleminde muhtemelen $e^{+jk2\pi t}$ olmalı.

orj. s. 24

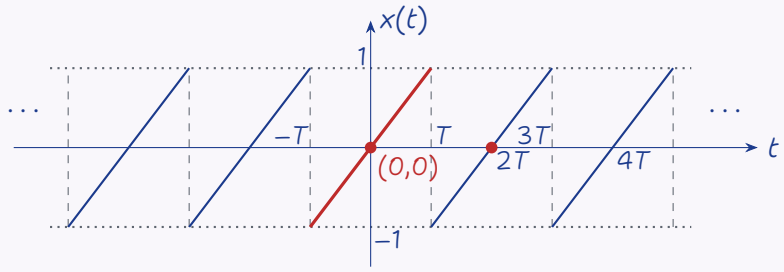
(Claude notu: s. 23 ile aynı sayfa. Pembe kalemle eklenenler: üstteki "$= \frac{-1}{j2\pi k} e^{-j2\pi k} + \dots$" satırı I_2 olarak etiketlenip ✓ ile onaylanmış, sadeleşen iki terimin üstü çizilmiş ve $e^{-j2\pi k}$ daire içine alınmış.)

$$\underbrace{e^{-j2\pi k}}_{=1} \longrightarrow e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

Örnek (Soru)

orj. s. 25

Aşağıda verilen periyodik işaretin Fourier serisi açılımını bulunuz.



slope: $\frac{2}{2T} = \frac{1}{T}$ ✓ D.D! $\frac{1}{T} \cdot x = y$ ✓ $x(t) = \frac{t}{T}$

$$T_0 = 2T, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T} \checkmark$$

$$x_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt \checkmark$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \frac{t}{T}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{T}\cdot t}\,dt = \frac{1}{2T^2}\int_{-T}^{T} t\cdot e^{-jk\frac{\pi}{T}\cdot t}\,dt \qquad * \text{Kısmi integrasyon!}$$

$$u = t \qquad e^{-jk\frac{\pi}{T}\cdot t}\,dt = dv$$

$$du = dt \qquad \frac{-1}{jk\frac{\pi}{T}} e^{-jk\frac{\pi}{T}t} = v$$

orj. s. 26

$$= \frac{1}{2T^2}\left\{ t\cdot\frac{-1}{jk\frac{\pi}{T}}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{T}t}\Big|_{-T}^{T} + \int_{-T}^{T}\frac{1}{jk\frac{\pi}{T}} e^{-jk\frac{\pi}{T}t}\,dt \right\}$$

$$= \frac{1}{2T^2}\left\{ \frac{-1}{jk\frac{\pi}{T}}\cdot\left[T\cdot e^{-jk\pi} + T\cdot e^{jk\pi}\right] + \frac{1}{jk\frac{\pi}{T}}\cdot\frac{-1}{jk\frac{\pi}{T}t}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{T}t}\Big|_{-T}^{T} \right\}$$ [3]

$$= \frac{1}{2T^2}\left\{ \frac{jT^2}{\pi k}\left[e^{-j\pi k} + e^{j\pi k}\right] + \frac{1}{\left(k\cdot\frac{\pi}{T}\right)^2}\left[e^{-j\pi k} - e^{j\pi k}\right] \right\} \qquad \begin{aligned} e^{j\pi n} &= (-1)^n \\ e^{-j\pi n} &= (-1)^n \end{aligned}$$

$$= \frac{j}{2\pi k}\cdot 2\cdot(-1)^k + \frac{1}{2(\pi k)^2}\cdot 0 = \frac{j}{\pi k}\cdot(-1)^k = \frac{(-1)^{k+1/2}}{\pi k}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1/2}}{\pi k} e^{jk\frac{\pi}{T}\cdot t}$$

orj. s. 27

(Claude notu: s. 26 ile aynı sayfa; kırmızı $e^{\pm j\pi n} = (-1)^n$ ifadeleri kutu içine alınmış, $e^{\mp j\pi k}$ ve $(-1)^k$ terimlerinin altı çizilmiş. Pembe kalemle eklenenler:)

$$\underline{\underline{e^{-j2\pi k} = 1}}$$

[3] Claude notu: paydadaki t muhtemelen fazladan yazılmış; $\frac{-1}{jk\frac{\pi}{T}}$ olmalı (bir sonraki satırda da öyle kullanılmış).

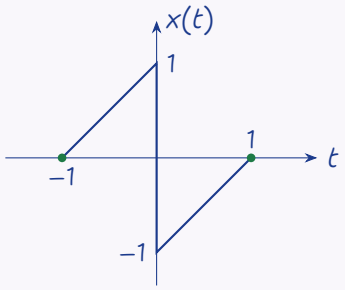
$$\left(e^{j\pi}\right)^n$$

$$e^{j\pi} = \cos\pi + j\sin\pi = -1 \longrightarrow (-1)^n$$

$$e^{-j\pi} = -1 \longrightarrow \left(e^{-j\pi}\right)^n = (-1)^n$$

Örnek (Soru)

orj. s. 28



$x(t)$ işaretinin FT'nu bulunuz.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$\text{slope}_1 = +1$ D.D: $1 \cdot (x+1) = y$ $\text{slope}_2 = +1$ D.D: $1(x-1) = y$

$$X(f) = \int_{-1}^{0} (t+1)\cdot e^{-j2\pi ft}\, dt + \int_{0}^{1} (t-1)\cdot e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$= \int_{-1}^{0} t\cdot e^{-j2\pi ft}\, dt + \int_{-1}^{0} e^{-j2\pi ft}\, dt + \int_{0}^{1} t\cdot e^{-j2\pi ft}\, dt - \int_{0}^{1} e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$= \frac{j}{\pi f}\left[1 - \text{sinc}(2f)\right]$$

orj. s. 29

(Claude notu: s. 28 ile aynı sayfa; FT tanımı kutu içine alınıp ✓ ile, sonuç da ✓ ile işaretlenmiş. Pembe kalemle eklenenler:)

D.D: $1 \cdot (x+1) = y \longrightarrow x(t) = t+1$ D.D: $1(x-1) = y$ $x(t) = t-1$

$$\boxed{\int t\cdot e^{-at}\, dt} \qquad \boxed{\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \text{sinc}(x)}$$

Örnek (Soru)

orj. s. 30

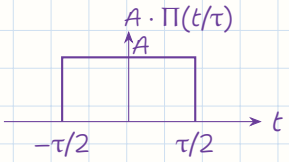
$x(t) = \Pi(2t+3) + \Pi(3t-2)$ işaretinin Fourier transformunu bulunuz.

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

Hatırlatma:

$$A\cdot\Pi(t/\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} A\cdot\tau\,\text{sinc}(f\tau) \longleftarrow$$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)\, e^{-j2\pi ft_0} \longleftarrow$$



$$\Pi\left(\frac{t+3/2}{1/2}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}\cdot\text{sinc}(f/2)\cdot e^{-j2\pi f(-3/2)}$$

$$\Pi\left(\frac{t-2/3}{1/3}\right) \longrightarrow \frac{1}{3}\,\text{sinc}\left(\frac{f}{3}\right) e^{-j2\pi f\cdot 2/3}$$

$$X(f) = \frac{1}{2}\,\text{sinc}\left(\frac{f}{2}\right)\cdot e^{+j2\pi f\cdot 3/2} + \frac{1}{3}\,\text{sinc}\left(\frac{f}{3}\right) e^{-j2\pi f\cdot 2/3}$$

orj. s. 31

(Claude notu: s. 30 ile aynı sayfa; $\Pi(2t+3)$ daire içine, ilk dönüşüm sonucu kutu içine alınmış. Pembe kalemle eklenenler:)

$$\Pi(2t+3) = \Pi\left(\frac{t+3/2}{1/2}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}\cdot\text{sinc}(f/2)\cdot e^{-j2\pi f(-3/2)}}$$

$2(t+3/2)$ $\quad t_0 = -3/2$ $\quad \tau = \frac{1}{2}$ $\quad f \cdot \tau = \frac{f}{2}$

Örnek (Soru)

orj. s. 32

$x(t) = \overbrace{4 \cdot \Pi(t/4)}^{\hat{x}(t)} \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ işaretinin fourier transformunu bulunuz.

* Modülasyon

Hatırlatma: $x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \longrightarrow \frac{1}{2}\left[X(f-f_0) + X(f+f_0)\right]$ ✓

$$\hat{x}(t) = 4 \cdot \Pi(t/4) \longrightarrow \hat{X}(f) = 16 \cdot \mathrm{sinc}(f \cdot 4)$$

$$X(f) = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \mathrm{sinc}(4(f-f_0)) + \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \mathrm{sinc}(4(f+f_0))$$
$$= 8\,\mathrm{sinc}(4(f-f_0)) + 8\,\mathrm{sinc}(4(f+f_0))$$

orj. s. 33

(Claude notu: s. 32 ile aynı sayfa; sorudaki $\hat{x}(t)$ etiketi bu sayfada tamamlanmış, sonuç ✓ ile onaylanmış. Pembe kalemle eklenenler:)

$$\hookrightarrow X(f) = \frac{1}{2}\left[\hat{X}(f-f_0) + \hat{X}(f+f)\right]$$ [4]

$$\hat{x}(t) = \underset{A=4}{4} \cdot \Pi(t/\underset{\tau=4}{4}) \longrightarrow \hat{X}(f) = \frac{16}{A\tau} \cdot \mathrm{sinc}\left(f \cdot \frac{4}{\tau}\right)$$

$$X(f) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \mathrm{sinc}(4(f-f_0))}_{X(f-f_0)} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \mathrm{sinc}(4(f+f_0))}_{X(f+f_0)}$$

$$A \cdot \Pi(t/\tau) \longrightarrow A\tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)$$

Örnek 14)

orj. s. 34

$x(t) = \frac{1}{1+t^2}$ Find the Fourier Transform.

$$e^{-\alpha|t|} \longrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} = \frac{2\alpha}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha^2}{4\pi^2} + f^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \longrightarrow X(f) \\ X(t) \longrightarrow x(-f) \end{array}\right\} \text{Duality}$$

$$X(t) = \frac{1}{1+t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} x(-f) \qquad \frac{2\alpha}{4\pi^2}\,\frac{1}{\frac{\alpha^2}{4\pi^2} + t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\alpha|-f|} = e^{-\alpha|f|}$$

$$\frac{1}{\frac{\alpha^2}{4\pi^2} + t^2} \longrightarrow \frac{4\pi^2}{2\alpha} \cdot e^{-\alpha|f|}$$

$$\frac{\alpha^2}{4\pi^2} = 1 \qquad \alpha^2 = 4\pi^2 \rightarrow \alpha = 2\pi$$

$$\frac{1}{1+t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi \cdot e^{-2\pi|f|}$$

orj. s. 35

(Claude notu: s. 34 ile aynı sayfa; duality çifti yeşil kutu içine alınmış, "Fourier Transform" altı çizilmiş. Yeşil/pembe kalemle eklenenler:)

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2} \overset{?}{=} Y(t) \qquad X(f) = \int_{T_0} x(t)\, e^{\cdots}\, dt$$

[4] Claude notu: muhtemelen $\hat{X}(f+f_0)$ olmalı.

$$\underset{y(t)}{e^{-\alpha|t|}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \underset{Y(f)}{\frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}} \quad \hookrightarrow \quad Y(t) = \frac{2\alpha}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha^2}{4\pi^2} + t^2} \qquad \frac{\alpha^2}{4\pi^2} = 1 \quad \alpha^2 = 4\pi^2 \quad \underline{\alpha = 2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \boxed{\frac{1}{1+t^2}}$$

$$\boxed{Y(t) = \frac{1}{\pi} \cdot x(t)} \downarrow$$

orj. s. 36

(Claude notu: s. 34'teki sayfanın başka bir açıklamalı hâli; s. 35'teki $Y(t) = \frac{1}{\pi}x(t)$ eklemeleri bu sayfada yok. $e^{-\alpha|t|} \to \frac{2\alpha}{\alpha^2+(2\pi f)^2}$ çifti yeşil kutuya alınmış, iki tarafı pembe daire içinde; $x(-f)$ altı çizilmiş. Pembe kalemle eklenenler:)

$$\underset{y(t)}{e^{-\alpha|t|}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \underset{Y(t)}{\frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}} \qquad Y(t) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \nearrow y(-f)$$

$$Y(f) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

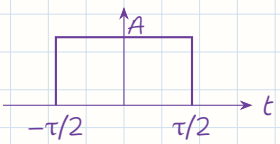
$$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi t)^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\alpha|-f|} = e^{-\alpha|f|}$$

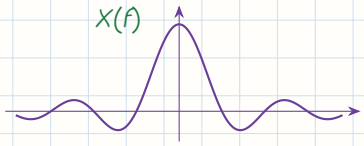
orj. s. 37

(Claude notu: s. 32–33'teki sayfanın alt kısmı; yatay pembe çizginin altı. Bu bölüm çoğunlukla pembe kalemle yazılmış.)

$$\boxed{\underset{x(t)}{A \cdot \Pi(t/\tau)} \longrightarrow \underset{X(f)}{A\tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)}}$$

$$x(t) \longrightarrow X(f)$$
$$X(t) \longrightarrow x(-f)$$





Duality! $A \cdot \tau \cdot \mathrm{sinc}(t\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot \Pi(f/\tau)$

$$X(t) \longrightarrow x(-f) = A \cdot \Pi(-f/\tau) = A \cdot \Pi(f/\tau) \longleftarrow$$

orj. s. 38

> **Şekil:** Bu sayfa basılı materyal içeriyor (çoktan seçmeli sınav sorusunun ekran görüntüsü, 5. soru, 5 puan); dijitalleştirilmedi. Öğrenci $1 + j$ şıkkını daire içine almış.
> *(orijinal notta, s. 38)*

El yazısı eklemeler:

$$\ldots = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right] = 1 + j \qquad e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

orj. s. 39

> **Şekil:** Bu sayfa basılı materyal içeriyor (çoktan seçmeli sınav sorusunun ekran görüntüsü, 2. soru, 8 puan: verilen sistemin doğrusallık / zamanla değişmezlik özellikleri); dijitalleştirilmedi.
> *(orijinal notta, s. 39)*

El yazısı eklemeler:

$$a \cdot x(t) \xrightarrow{T.} a \cdot y(t)$$

$$x(t) \longrightarrow y(t) = t^2 \cdot x(t-1)$$

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = t^2 \cdot x_1(t-1)$$

$$x_1(t) = a \cdot x(t) \longrightarrow y_1(t) = \underline{t^2 \cdot a \cdot x(t-1)}$$

$$T[ax(t)] = a \cdot T[x(t)] = \underline{a \cdot t^2 \cdot x(t-1)}$$

orj. s. 40

(Claude notu: s. 39 ile aynı basılı soru. Öğrenci "Lineer değildir" içeren iki şıkkı karalamış, son şıkkı (Lineer, zamanla değişir) daire içine alıp "Lineer" ve "zamanla değişir" kısımlarını ✓ ile işaretlemiş; $y(t) = t^2 \cdot x(t-1)$ altı çizilmiş. Yeni el yazısı eklemeler:)

$$x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = t^2 \cdot x_2(t-1) & \\ x_2(t) = x(t-t_0) \qquad y_2(t) = t^2 \cdot x(t-t_0-1) & \\ \underline{\underline{y(t-t_0)}} = (t-t_0)^2\, x(t-t_0-1) & \end{array}\right\} \neq$$

orj. s. 41

> **Şekil:** Bu sayfa basılı materyal içeriyor (PDF görüntüleyicide açılmış çoktan seçmeli sınav sorusu, 4. soru, 10 puan: dürtü cevabı verilen ayrık zamanlı sistemin $u[n-3]$ girişi için çıkışı); dijitalleştirilmedi.
> *(orijinal notta, s. 41)*

El yazısı eklemeler:

$$\boxed{x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]} \quad , \quad x[n] \cdot \delta[n-n_0] = x[n_0]\,\delta[n-n_0]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= (u[n-3]) * (-\delta[n] + \delta[n+2]) \\ &= -\delta[n] * u[n-3] + \delta[n+2] * u[n-3] \\ &= -u[n-3] + u[n+2-3] \\ &= u[n-1] - u[n-3] \end{aligned}$$

