Matematik II

Seriler, vektörler ve çok değişkenli fonksiyonlar (s. 1–20)

Orijinal not: MAT-2.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

Seri Testleri

1) n. terim testi (nth term test) (Iraksaklık testi) (Limit Testi)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \longrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n) \neq 0$$ Bu seri ıraksaktır.

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$$ Bu test işe yaramaz. Seri hâlen ıraksak veya yakınsak olabilir.

$$\lim_{n\to\infty} 2 = 2 \qquad \lim_{n\to\infty} n = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} 3^n = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} 3^{-n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

1) Paydanın derecesi > Payın derecesi ⇒ sonuç = 0, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2+1} = 0$,
2) Paydanın derecesi = Payın derecesi ⇒ sonuç = derecesi belirleyen terimlerin katsayıları ? nın oranı, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4n^2-1} = \frac{1}{4}$
3) Paydanın derecesi < Payın derecesi ⇒ sonuç ? okunamadı $\begin{cases} \to +\infty \\ \to -\infty \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-5n+3}{2n-7} = \infty$$

Derece belirlemede kural → $n^n > n!$ > $7^n > 5^n$ > $n^{100} > n^3 > n^2$ > $\log_a b$ > trigonometrik

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{n^{100}+n+1} \to +\infty \text{ ? okunamadı } = +\infty$$

2) Geometrik seri testi

Üstel fonk. olan serilerdir. (2^n, 3^{-n}, $(\frac{1}{2})^n$, ...)

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \longrightarrow \text{üs } n \text{ yapıldıktan sonra} \longrightarrow \text{geometrik seri}$$

$$|r| \geq 1 \Rightarrow \text{seri ıraksaktır.}$$
$$\Rightarrow |r| < 1 \Rightarrow \text{seri yakınsaktır.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^n, \quad r = 5 \geq 1, \quad \text{ıraksak}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \left|\frac{1}{3}\right| < 1, \quad \text{yakınsak}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 3^n \Rightarrow |3| \geq 1, \quad \text{ıraksak}$$

3) P serisi testi

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\longrightarrow$ toplama, çıkarma durumunda ifade olmamalıdır. / ? çarpma durumu, sayı çarpanı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}: \qquad p > 1 \Rightarrow \text{seri yakınsak} \qquad p \leq 1 \Rightarrow \text{seri ıraksak}$$

4) İntegral Testi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \begin{array}{l} \text{① negatif terim seride bulunmamalı} \\ \text{② } a_n\text{'in integrali hesaplanabilir olmalı} \end{array}$$

$$\int_1^{\infty} a_n \, dn = \text{sonuç} \begin{cases} c \rightarrow \text{SERİ YAKINSAK} \\ \infty \rightarrow \text{SERİ IRAKSAK} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \rightarrow \text{negatif değil, integral alınabilir} \rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \, dn$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{1+n^2} \, dn = \lim_{t\to\infty} \Big[\arctan(n)\Big]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty} \left(\arctan t - \arctan(1)\right)$$

$$* \ \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \qquad * \ \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$
$$* \ \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \qquad * \ \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \rightarrow \text{sabit sayı} \rightarrow \text{Bu seri yakınsaktır.}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \rightarrow \text{tüm terimler pozitif, integral alınabilir}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln n}{n}\,dn = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{\ln n}{n}\,dn = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{(\ln n)^2}{2} \Big|_2^{t} \right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{(\ln t)^2}{2} - \frac{(\ln 2)^2}{2} \right) = \infty - \frac{(\ln 2)^2}{2} = \infty \rightarrow \text{Bu seri ıraksaktır.}$$

orj. s. 2

5) Karşılaştırma Testleri (comparison tests)

→ Doğrudan Karşılaştırma Testi (5.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{(ne old. bildi. seri)}$$

$a_n < b_n \Rightarrow \sum b_n$ serisi yakınsak ise $\sum a_n$ de yakınsak olur.

$b_n < a_n \Rightarrow \sum b_n$ serisi ıraksak ise $\sum a_n$ de ıraksak olur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} = a_n \qquad b_n = \frac{1}{n^3} \rightarrow \text{yakınsak p-testi}$$

$$\frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3} \qquad a_n = \text{yakınsak}$$

→ (5.2) Limit Karşılaştırma Testi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \text{sonuç} > 0 \text{ ve } \neq +\infty$$

$$0 < \text{sonuç} < \infty \rightarrow a_n \text{ ve } b_n \rightarrow \begin{matrix} \text{ıraksak} \\ \text{yakınsak} \end{matrix}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-2} \qquad \frac{1}{n^3-2} > \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\text{yakınsak}} \qquad \text{DKT olmuyor.}$$

$$\text{LKT} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n^3-2}}{\frac{1}{n^3}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n^3-2} \right) = \underset{\text{sonsuz değil}}{1 > 0}$$

İki seri de yakınsaktır.

6) Oran Testi (ratio test)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \text{sonuç} \begin{cases} > 1 & \text{ıraksak} \\ < 1 & \text{yakınsak} \\ = 1 & \text{bu test işe yaramaz.} \end{cases}$$

İçinde:

- faktöriyel
- üstel fonk.

barındıran serileri çok büyük ihtimalle çözer,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n} \to \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}}{\frac{n!}{5^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{5} \right| = +\infty \text{ ıraksaktır.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)} \to \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-10)^{n+1}}{4^{2n+3}(n+2)}}{\frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-10(n+1)}{4^2(n+2)} \right| = \frac{10}{16} < 1 \text{ yakınsaktır.}$$

7) Kök Testi (Root Test)

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^n$ veya $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^{2n}$ veya $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^{n+1}$ ... $\to$ $\sqrt[n]{a_n^n}$, $\sqrt[2n]{a_n^{2n}}$, $\sqrt[n+1]{a_n^{n+1}}$, ...

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n^n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n| = \text{sonuç} \begin{cases} > 1 & \text{IRAKSAK} \\ < 1 & \text{YAKINSAK} \\ = 1 & \text{bu test işe yaramaz.} \end{cases}$$

8) Alterne Seri Testi

$(-1)^n$ içeren serilere denir. Bu diziler alterne seri testi ile çözülür.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1 + 2 - 3 + 4 - \cdots$[1] $\cos(\pi n) = 1, -1$ $\cos 0 = 1, \cos 2\pi = 1, \cos(\pi n) = (-1)^n$;
$\cos \pi = -1, \cos 3\pi = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \to \text{alterne seri, seri yakınsak} \begin{cases} 1.\text{ Koşul} \to \text{Her } n \text{ için } a_n \text{ pozitif olmalı.} \\ 2.\text{ Koşul} \to \text{Her } n \text{ için } a_n > a_{n+1} \\ 3.\text{ Koşul} \to \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$$

değil ise seri yakınsak değildir, ıraksak da denemez.

orj. s. 3

Geo. Serilerin Top. Bulma

$$|r| < 1 \to \text{serinin top.} \to \frac{a_1}{1-r} \quad /$$
$$|r| \geq 1 \to \text{serinin top.} \to +\infty, -\infty$$

[1] Claude notu: muhtemelen $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ olmalı.

Mutlak Yakınsaklık ve Koşullu Yakınsaklık

(absolutely convergent and conditionally convergent)

Alterne seriler için konuşulan kavramlardır. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

Mutlak yakınsaklık:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n a_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

→ eğer yakınsak çıkarsa mutlak yakınsak olur.
→ eğer ıraksak çıkarsa bu seri mutlak yakınsak değildir.

Koşullu Yakınsaklık

1. Koşul: Seri mutlak yakınsak değil ise
2. Koşul: Seri alterne seri testi ile yakınsak çıkarsa
Bu seriye koşullu yakınsak denir.

Alterne seri mutlak yakınsak ve koşullu yakınsak değilse bu seri ıraksak olur.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \rightarrow p \text{ serisi testi, } p = 2 > 1 \text{ yakınsak}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ serisi mutlak yakınsaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \rightarrow \overset{n.\text{ terim testi}}{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \neq 0} \text{ ıraksaktır.}$$

Bu seri mutlak yakınsak değildir. Koşullu yakınsaklığa bakalım.

$$\text{Koşullu yakınsaklık} \rightarrow \text{Alterne seri testi} \rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \rightarrow \text{pozitif}$$

$$\downarrow a_n \neq a_{n+1} \rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Koşullu yakınsak değildir. Bu seri ıraksaktır.

Kuvvet Serileri (Power Series)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2-3n} \text{ (seri)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot 3^n \text{ (seri)}$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

Seri içine $(x-a)^n$ biçiminde x'e bağlı üstlü bir ifadenin gelmesiyle kuvvet serileri oluşur.

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n(x-1)^n$ (Kuvvet serisi), $\sum_{n=0}^{\infty} 3nx^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}(x-2)^n = \frac{1}{2}(x-2)^1 + \frac{2}{3}(x-2)^2 + \cdots$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \rightarrow$ Bu seri x'in hangi değerleri için yakınsak hangi değerleri için ıraksak olur?
$\rightarrow$ yakınsaklık aralığı / yakınsaklık yarıçapı, yakınsaklık merkezi
$\rightarrow$ fonksiyonların Taylor ve Maclaurin açılımlarını inceleyeceğiz. Taylor ve Maclaurin açılımları kuvvet serilerinin çıkışına neden oluyor.

orj. s. 4

Kuvvet Serilerinin Yakınsaklık Aralığı ve Yarıçapı (interval and radius of convergence)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}(x+3)^n$$ yakınsaklık aralığı, yarıçapı?

1. Adım: Oran Testi $\rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \text{ yakınsak} \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{4^{n+1}}(x+3)^{n+1}}{\frac{(-1)^n n}{4^n}(x+3)^n}\right|$$

$$\downarrow \frac{|x+3|}{4} < 1 \leftarrow |x+3|\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{4n}\right|}_{1/4} \leftarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x+3)}{4n}\right| \hookleftarrow$$

$$-4 < x+3 < 4 \rightarrow \underbrace{\boxed{-7 < x < 1}}_{\text{yakınsak}}$$

$x = -7$ ve $x = 1$ için yakınsaklık bu testle tespit edilemedi.

$$\text{yakınsaklık yarıçapı} = \frac{1-(-7)}{2} = 4 \qquad \text{yakınsaklık merkezi} = \frac{-7+1}{2} = -3$$

2. Adım: $x = 1$, $x = -7$ en baştaki kuvvet serisinde yerine konur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}(x+3)^n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}(-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

$\rightarrow$ yakınsak ? ıraksak ? $\rightarrow$ n.terim testi $\lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$ ıraksaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} 4^n \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \xrightarrow{\text{alterne seri testi}} \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n n|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n = \lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0 \quad \text{(mutlak yakınsak değil)}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} 4^n$ → Koşullu yakınsaklık için alterne seri testi

→ $\begin{cases} \text{her } n \text{ için } a_n \text{ poz. } \checkmark \\ \text{her } n \text{ için } a_n > a_{n+1} \times \end{cases}$ → Bu seri ıraksaktır.

3. Adım: Yakınsaklık aralığı → $\boxed{-7 < x < 1}$

$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(2x+1)^n$ yakınsaklık aralığı, yarıçapı?

oran testi → $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!\,(2x+1)^{n+1}}{n!\,(2x+1)^n}\right| < 1$

$\rightarrow |2x+1| \underbrace{\lim_{n\to\infty} |n+1|}_{\infty} < 1$

yakınsaklık yarıçapı (R) = 0 ← Bu değerde sadece yakınsak ← $2x+1=0$

yakınsaklık aralığı yoktur. $x = -\frac{1}{2}$

$\leftarrow |2x+1| \geq 0 \leftarrow |2x+1| \cdot \infty < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n^n}$$

→ oran testi → $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(x-6)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(x-6)^n}{n^n}}\right| < 1$

$\rightarrow |x-6| \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right|}_{0^+} < 1 \rightarrow |x-6| \cdot 0 < 1$

$R = \infty$ x'in yakınsaklık aralığı → $(-\infty, +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (4x-8)^n$$

$$\to \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}(4x-8)^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n(4x-8)^n}{n}}\right| < 1$$

$$\to\ 2|4x-8|\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|}_{1} < 1 \ \to\ 2|4x-8| < 1$$

$$\downarrow\ |x-2| < \frac{1}{8}$$

$$R = \frac{\frac{17}{8}-\frac{15}{8}}{2} = \frac{1}{8} \ \leftarrow\ \frac{15}{8} < x < \frac{17}{8} \ \leftarrow\ -\frac{1}{8} < x-2 < \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{15}{8}: \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \ \to\ \text{alterne seri T.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \ \to\ \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ $\to$ P serisi testi ($p \le 1 \to$ ıraksak) $\to$ mutlak yakınsak değil.

alterne seri T. $\to$ her n için $\frac{1}{n}$ poz. ✓; her n için $a_n > a_{n+1}$ ✓; $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ✓ edilir. $\to$ koşullu yakınsaklık, Aralığa dahil

$$x = \frac{17}{8}: \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n \ \to\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \ \to\ \text{p serisi testi}$$

Aralığa dahil değildir. Iraksaktır.

Yakınsaklık Aralığı: $\boxed{\frac{15}{8} \le x < \frac{17}{8}}$

orj. s. 5

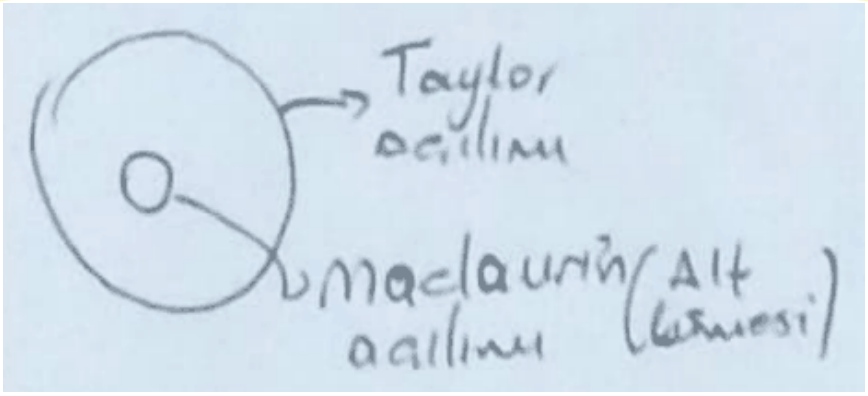
Taylor ve Maclaurin Seri Açılımları

$f(x) \to$ sonsuz defa türevlenebilir ise $\to$ Seri haline getirilir.

$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \ \to$ Sınırlı türev sayısına sahip.

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1, \quad f''(x) = 6x + 2, \quad f'''(x) = 6, \quad f^4(x) = 0 \cdots$

$f(x) = e^{2x} \to f'(x) = e^{2x}\cdot 2 \to f''(x) = e^{2x}\cdot 4 \to f'''(x) = e^{2x}\cdot 8 \to f^4(x) = e^{2x}\cdot 16 \to$ sonsuz defa türevlenebilir. Bu nedenle Taylor ve Maclaurin seri açılımı elde edilebilir.



orijinal çizim, s. 5

$f(x)$'in $x = x_0$ seri açılımına TAYLOR

$f(x)$'in $x = 0$ seri açılımına MACLAURIN

Taylor Açılımı $x = x_0$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{1. terim}} + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{2. terim}} + \underbrace{\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}}_{\text{3. terim}} + \underbrace{\frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!}}_{\text{4. terim}} + \cdots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}}$$

Maclaurin Açılımı $x = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \cdots$$

$f(x) = e^x$'in $x = 1$ nok. taylor açılımının ilk dört terimi? $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$ ...

1. terim: $f(1) = e$ 2. terim: $f'(1)(x-1) = e(x-1)$

3. terim: $\frac{f''(1)(x-1)^2}{2!} = \frac{e(x-1)^2}{2}$ 4. terim: $\frac{f'''(1)(x-1)^3}{3!} = \frac{e(x-1)^3}{6}$

$$f(x) \cong e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2} + \frac{e(x-1)^3}{6} + \cdots$$

$f(x) = \cos x$ Maclaurin açılımına göre ilk 5 terimini bulunuz.

1. terim: $f(0) = 1$ 2. terim: $\underset{0}{f'(0)}(x-0) = 0$

3. terim: $\frac{f''(0)(x-0)^2}{2!} = \frac{-x^2}{2}$

$f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^4(x) = \cos x$

4. terim: $\underset{3!}{\frac{f'''(0)(x-0)^3}{6}} = 0$ 5. terim: $\frac{f^4(0)(x-0)^4}{4!} = \frac{x^4}{24}$

$$f(x) \cong 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

3.Derece Taylor Polinomu → x^3'üne kadar açılım yapılacak,
4.Derece Taylor Polinomu → x^4 " " " "

Taylor ve Maclaurin Serilerini Bulma

Taylor Seri Formülü
$f(x)$ = sonsuz defa türevlenebilir, $x = x_0$ noktasında

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)\,(x-x_0)^n}{n!}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \cdots$$

Maclaurin Seri Formülü ⇒ $x = 0$ da taylor seri formülü

$f(x) = e^x$ $x = 4$ nok. 2. dereceden taylor polinomunu bulunuz.

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x$$
$$f'''(x) = e^x$$
$$f^4(x) = e^x$$
$$\vdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(4)}{n!}(x-4)^n \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^4(x-4)^n}{n!} \rightarrow n=2: \sum_{n=0}^{2} \frac{e^4(x-4)^n}{n!}$$

$$e^x = P_2(x) = e^4 + e^4(x-4) + \frac{e^4(x-4)^2}{2!}$$

orj. s. 6

$f(x) = \frac{1}{x}$ $x = 2$ nok. Taylor serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)\,(x-2)^n}{n!}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}\ (n=0) \qquad f'(x) = -x^{-2}\ (n=1)$$
$$f''(x) = 2x^{-3}\ (n=2) \qquad f'''(x) = -6x^{-4}\ (n=3)$$
$$f^n(x) = (-1)^n\, n!\, x^{-n-1}\ (n=n)$$

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{-n-1}\, n!\,(x-2)^n}{n!} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, 2^{-n-1}(x-2)^n$$

$f(x) = \cos 2x$ maclaurin serisi → $x = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\,x^n}{n!}$$

$$f(x) = \cos 2x\ (n=0) \quad f'(x) = -2\sin 2x\ (n=1) \quad f''(x) = -4\cos 2x\ (n=2)$$
$$f'''(x) = 8\sin 2x\ (n=3) \quad f^4(x) = 16\cos 2x\ (n=4) \quad f^5(x) = -32\sin 2x\ (n=5)$$

$$f^n(x) = \begin{cases} n = 2a & (-1)^{n/2}\, 2^n \cos 2x \\ n = 2a-1 & (-1)^{(n+1)/2}\, 2^n \sin 2x \end{cases}$$

$1/(1-x)$ ifadesinin Maclaurin Serisi ve Yerine Koyma Metodu

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \longrightarrow \text{Yakınsaklık aralığı } -1 < x < 1$$

Yerine Koyma Metodu

$\frac{1}{1+x}$'in maclaurin serisini, yakınsaklık aralığını bul.

$$\frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

Yakınsaklık Aralığı
$-1 < -x < 1$
$-1 < x < 1$

$\frac{1}{2x-3}$ " " " " " "

$$\frac{1}{1-(-2x+4)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x+4)^n \quad \text{Yakınsaklık Aralığı} \rightarrow \begin{matrix} -1 < -2x+4 < 1 \\ -5 < -2x < -3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 3 < 2x < 5 \\ \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \end{matrix}$$

e^x ifadesinin Mac. Ser. ve Y. Koyma Metodu

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \longrightarrow \text{Yakınsaklık Aralığı } -\infty < x < \infty$$

Yerine Koyma Metodu

$$e^{x^2} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \qquad e^{2x-1} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n!}$$

$$x^3 e^{4x} \rightarrow x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^3 (4x)^n}{n!}$$

$\int e^{x^3} dx$ integralini Mac. serisinin ilk 2 terimini kullanarak hesaplayınız.

$$e^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!} = \boxed{1 + x^3} + \cdots \rightarrow \int (1 + x^3)\, dx$$

$\sin x$ ifa. Mac. Ser. ve Y.K.M.[2]

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

[2] Claude notu: muhtemelen $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ olmalı.

Yak. Ara. $-\infty < x < \infty$

$$\sin 3x \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$x^2 \sin 5x \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2 (-1)^n (5x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin(x^2) \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

$f(x) = \cos 3x$ 6.derece Mac.ser. açılımı?

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \cos 3x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$? \cos 3x = 1 - \frac{9x^2}{2} + \frac{81x^4}{24} - \frac{729x^6}{720}$$

$f(x) = \cos(x^3)$ yak. aralığı ve yarıçapı?

$$\cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n}}{(2n)!}$$

Y.A. $= (-\infty, \infty)$

Y. yarıçapı $= \infty$

orj. s. 7

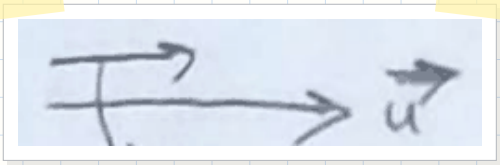
Vektör uzunluğu

$$\vec{v} = (x_1, y_1) \to |\vec{v}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad /$$

$$\vec{v} = (x_1, y_1, z_1) \to \|\vec{v}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Birim Vek. Olm. Vek. Bir. Vektör yapma

$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \to$ birim vektörü bulmamızı sağlar.



orijinal çizim, s. 7

$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = 1 \to$ birim vektör

İç Çarpım (Dot Product or Scalar Product)

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ veya $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ olarak gösterilir. Sonuç bir sayıdır.

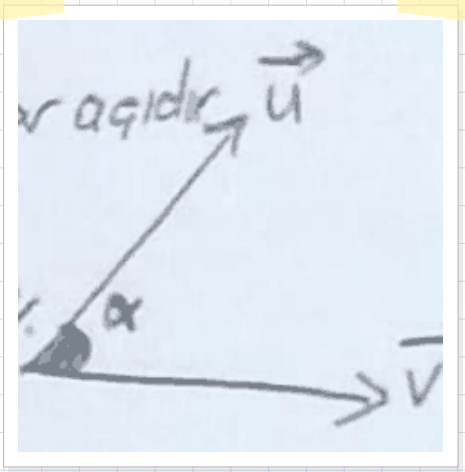
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \qquad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ ise α dar açıdır, $0° < \alpha < 90°$

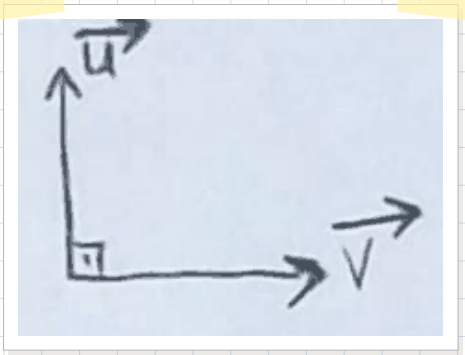
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ise $\alpha = 90°$'dir.

$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ ise α geniş açıdır, $90° < \alpha < 180°$



orijinal çizim, s. 7

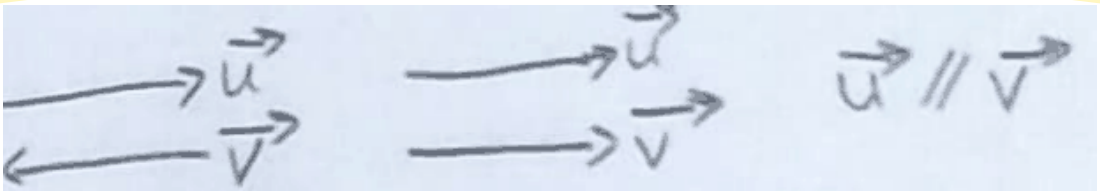
İki Vektörün Diklik ve Paralellik Şartı



orijinal çizim, s. 7

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

→ iki vektörün iç çarpımı 0 ise birbirlerine diktir.

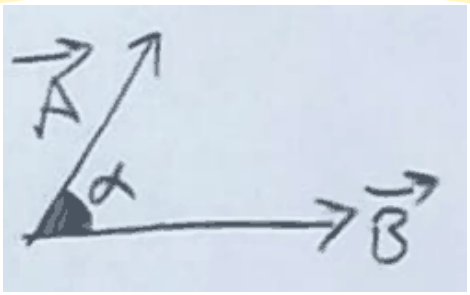


orijinal çizim, s. 7

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ ise

vektörler birbirlerine paralel dir

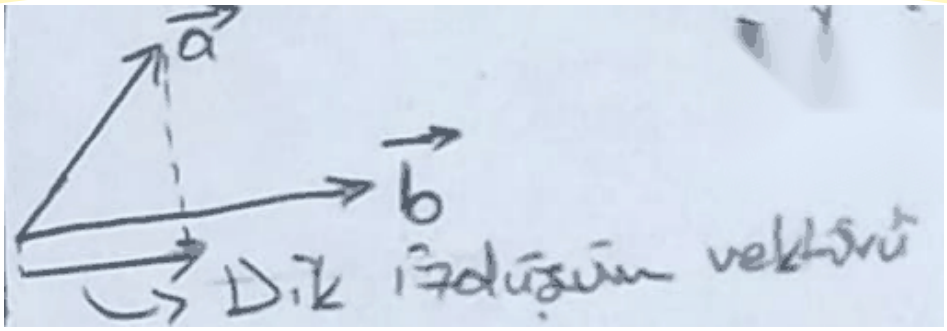
İki Vektör Arasındaki Açıyı Bulma



orijinal çizim, s. 7

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$$

Dik İzdüşüm Vektörünü Bulma



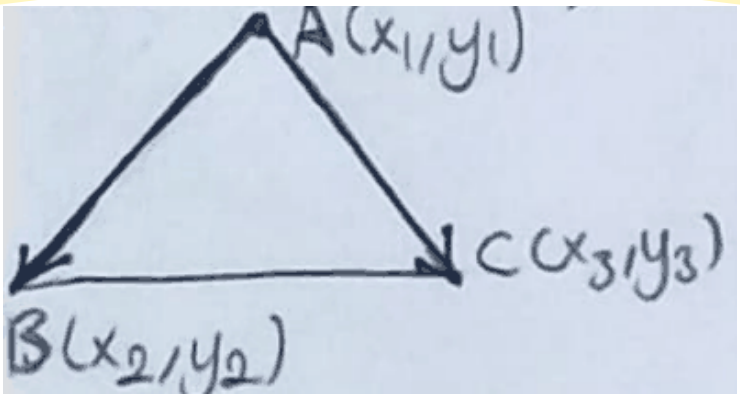
orijinal çizim, s. 7

Dik izd. Vek. uzunluğu → $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$ (vektör kimin üzerine düşürüyorsa vek. ? yönünde)

Dik izdüşüm vektörü → $\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \cdot \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$

a'nın b üzerine oluş. dik izdüşüm vek. uzun. — b'nin birim vek.

Düzlemde Üçgen Alanını Vek. Yardımıyla Hesaplama

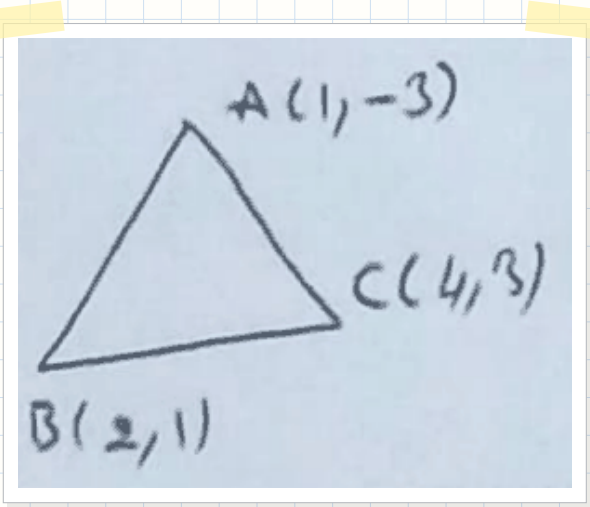


orijinal çizim, s. 7

→ öncelikle köşe vek. $\overrightarrow{AB} = B - A$, $\overrightarrow{AC} = C - A$

$$A(ABC) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|$$

ÖR: $A(1,-3)$, $B(2,1)$, $C(4,3)$ üç. Alan ?

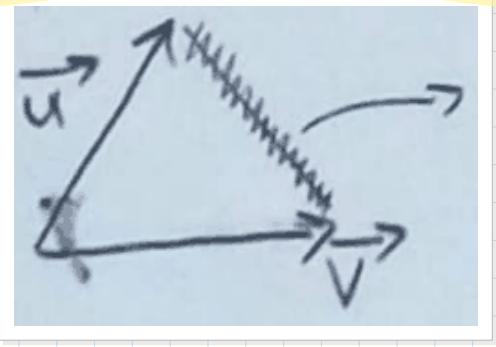


orijinal çizim, s. 7

$$A(ABC) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3$$

İki Vektör Arasındaki Uzaklığı Bulma



orijinal çizim, s. 7

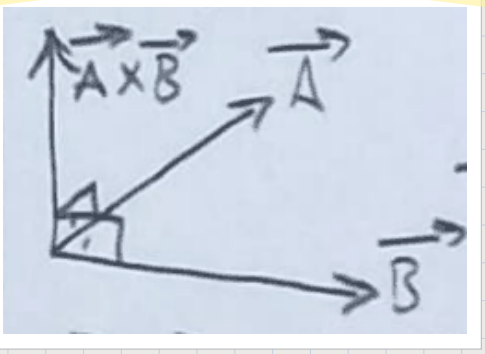
$$\rightarrow \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

ÖR: $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (2,-3,4)$

$$\rightarrow \|(-1{,}5,-1)\| = \sqrt{(-1)^2 + 25 + (-1)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Vektörel Çarpım (Cross Product)

$\vec{A} \times \vec{B} \rightarrow$ cross product $\rightarrow$ vek. çarp. sonucu yine bir vek. dür.



orijinal çizim, s. 7

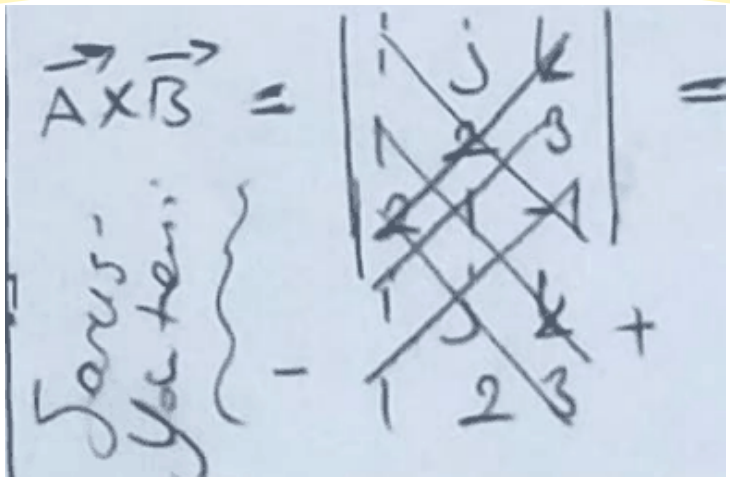
→ A ve B'nin vektörel çarpımı, her iki vektöre de diktir!

$$\vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{A} \qquad \vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{B}$$

$$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1) \qquad \vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$ det. sonucu bize vek. çarp. verir.

ÖR: $\vec{A} = (1,2,3)$ $\vec{B} = (2,1,-1)$



orijinal çizim, s. 7

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2i + k + 6j) - (4k + 3i - j)$$

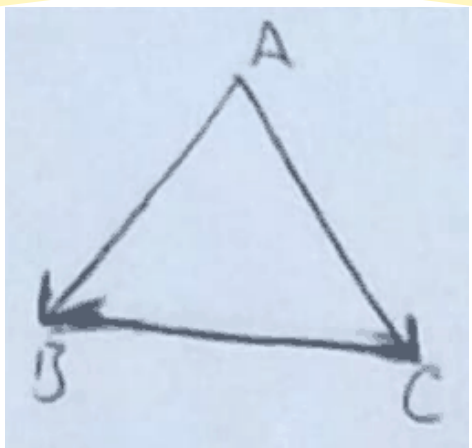
$$= -5i + 7j - 3k$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (-5, 7, -3)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = 0 \qquad \vec{B} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = -10 + 7 + 3 = 0$$

orj. s. 8

Uzayda Üçgen Alanını Vektör Yardımıyla Bulma



orijinal çizim, s. 8

Düzlem → $\mathbb{R}^2$ → (x, y)
Uzay → $\mathbb{R}^3$ → (x, y, z)

$$A(ABC) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2}$$

ÖR: $\overrightarrow{CA} = (1,2,-1)$ $\overrightarrow{CB} = (3,4,1)$

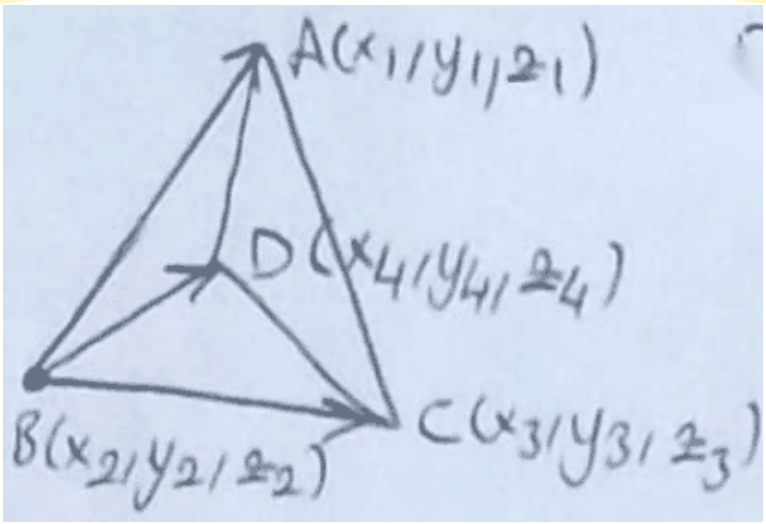
$$\frac{\|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\|}{2} \rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6i - 4j - 2k$$

$$= (6,-4,-2)$$

$$A(ABC) = \frac{\sqrt{36+16+4}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{14}}{2} = \sqrt{14}$$

Köşe Koordinatları Bilinen Dörtyüzlünün Hacmini Bulma (Volume of tetrahedron)



orijinal çizim, s. 8

$$\text{Piramit Hacmi} = \frac{(\text{Taban Alanı}) \cdot (\text{Yükseklik})}{3}$$

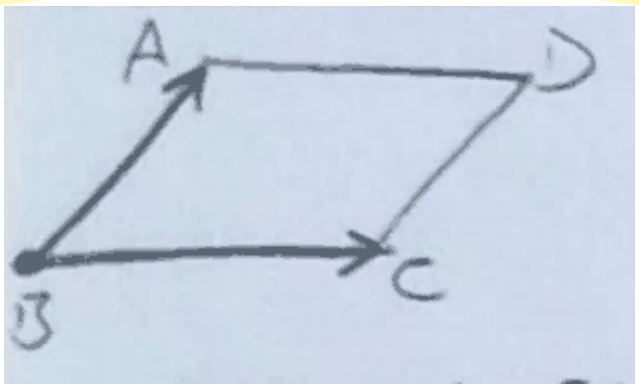
1. yol (Lineer Cebir):

$$\text{Hacim} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

2. yol (Calc-2) (Vekt. ile):

$$\text{Hacim} = \left|\frac{\overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC})}{6}\right| = \left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$$

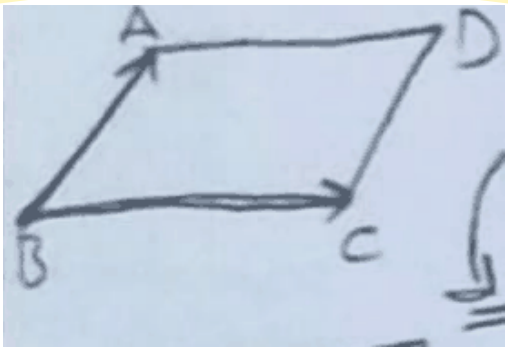
Uzayda Paralelkenar Alanını Vek. Yard. ile Bulma



orijinal çizim, s. 8

$$A(ABCD) = \|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\|$$

ÖR: $A(-1,3,2)$, $B(4,1,0)$, $C(2,1,5)$



orijinal çizim, s. 8

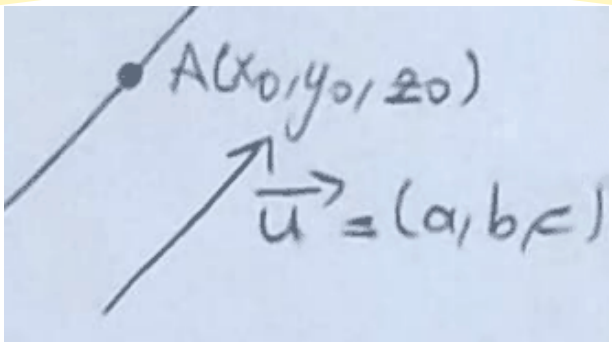
$$A(ABCD) = \|(-5,2,2) \times (-2,0,5)\|$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (10i + 0 - 4j) - (-4k + 0 - 25j)$$

$$= 10i + 21j + 4k = (10,21,4)$$

$$\sqrt{100 + 441 + 16} = \boxed{\sqrt{557}}$$

Uzayda Doğru Denklemi Yazma



orijinal çizim, s. 8

Yazacağımız doğru üzerinde bir nokta ve doğruya paralel bir vektör gereklidir.

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} = t$$

Parametrik doğru denklemi:

$$x = at + x_0 \qquad y = bt + y_0 \qquad z = ct + z_0$$

ÖR: $A(-1,2,3)$ $\vec{u} = (2,1,5)$ A'dan geçen $\vec{u}$'ya paralel doğru = ?

$$\boxed{\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{5}} \rightarrow \text{doğrunun kapalı denklemi}$$

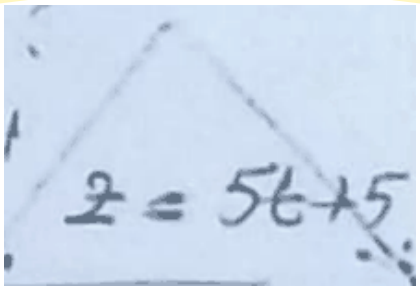
Doğ. Par. D.:

$$x = 2t - 1$$
$$y = t + 2$$
$$z = 5t + 3$$

ÖR: $A(-1,2,5)$, $\vec{u} = (3,0,5)$ A'dan geç. $\vec{u}$'ya paral. doğru ?

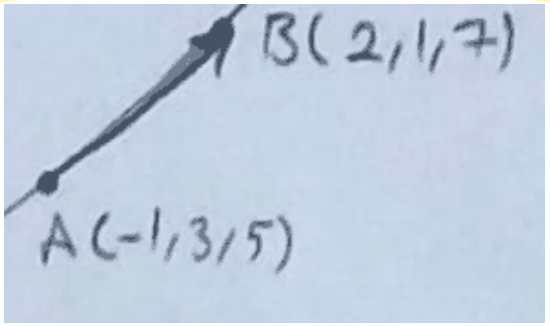
$$\frac{x+1}{3} = \begin{array}{l}\text{Bu noktada}\\ \text{paydaya 0}\\ \text{yazılamayacağından}\\ y = 2,\end{array} = \frac{z-5}{5}$$

$$x = 3t - 1$$
$$y = 2$$
$$z = 5t + 5$$



orijinal çizim, s. 8

ÖR: A(−1,3,5) B(2,1,7) nokt. geç. doğ. denklemi ?



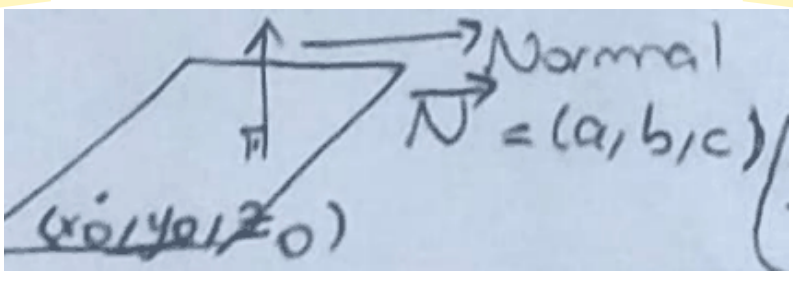
orijinal çizim, s. 8

$$\overrightarrow{AB} = (3,-2,2)$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-5}{2}$$

$$x = 3t - 1$$
$$y = -2t + 3$$
$$z = 2t + 5$$

Düzlem Denk. Yazma



orijinal çizim, s. 8

2 şey gerekli!

- Düzlem üzerinde bir nokta.
- Düzleme dik vektör.

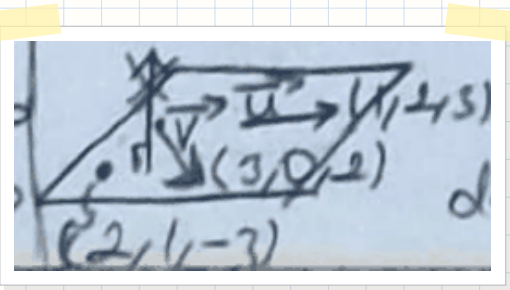
$\vec{N} = (a,b,c)$ $\boxed{4(x-2)+7(y-1)-6(z+3)=0}$ $\leftarrow$ $(4,7,-6) = \vec{u} \times \vec{v}$

$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$

ÖR: $A(-1,2,3)$ nok. geç. $\vec{u} = (2,1,5)$ vek. dik ? düz. denk.?

$$2(x+1)+1(y-2)+5(z-3)=0$$
$$2x+2+y-2+5z-15=0$$

ÖR: $A(2,1,-3)$ nokt. geç. $\vec{u} = (1,2,3)$ $\vec{v} = (3,0,2)$ vekt. üzerinde old. düz. denk.?



orijinal çizim, s. 8

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$'nin vekt. çarp. düz. dik vekt. verir. !

Üçlü Vekt. Çarpım ve Uyg. (Triple Product)

• $\rightarrow$ iç çarpım × $\rightarrow$ vektörel çarpım

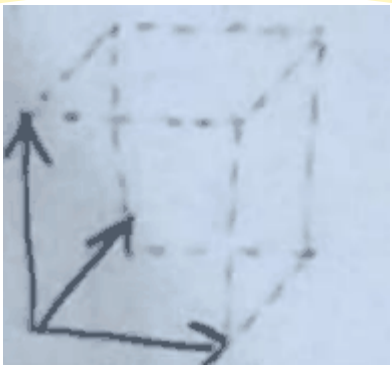
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ $\rightarrow$ Triple Product

1. yol: $\vec{b} \times \vec{c}$ bulunur, $\vec{a}$ ile çarpılır.

2. yol:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

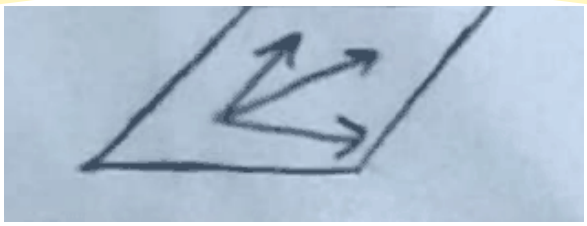
$\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ $\vec{c} = (c_1,c_2,c_3)$ $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$



orijinal çizim, s. 8

üçlü çarpım bize bir prizmanın hacmini verir. Hacim $= |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$

Eğer hacim 0 çıkarsa bu üç vektör $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ aynı düzlem üstündedir.



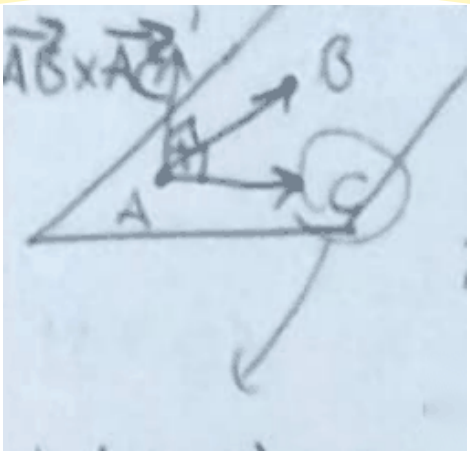
orijinal çizim, s. 8

$$\text{Hacim} = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = 0$$

orj. s. 9

Geçtiği Üç Nokta Bilinen Düzlem Denk. Bulma

ÖR: $A(1,2,0)$ $B(3,-1,4)$, $C(2,1,1)$ nokt. geç. düz. denk.?



orijinal çizim, s. 9

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ düz. dik bir normal vekt. verir.

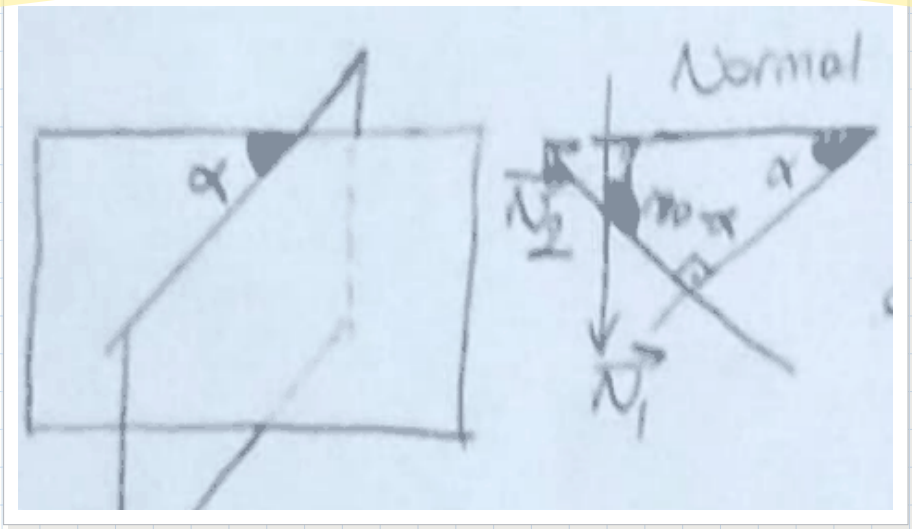
$$\overrightarrow{AB} = (2,-3,4)$$
$$\overrightarrow{AC} = (1,-1,1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + 2j + k = (1,2,1)$$

$$1 \cdot (x-2) + 2 \cdot (y-1) + 1 \cdot (z-1) = 0$$
$$x + 2y + z - 5 = 0$$

Düz. üzer. herhangi bir nokt. kull. kontrol edilebilir.

İki Düzlem Arasındaki Açı



orijinal çizim, s. 9

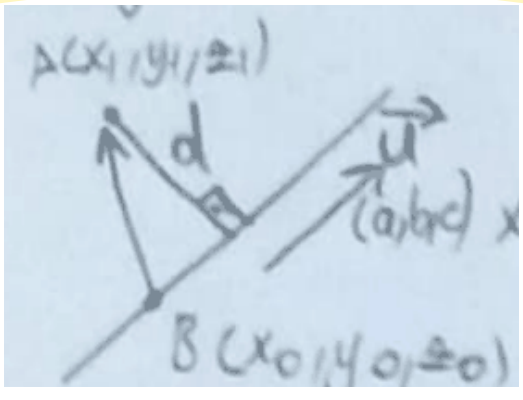
$$\cos(180-\alpha) = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|}$$

ÖR: $x - 2y + z = 5$ düz. ile $2x + y - 3z = 1$ düz. arası açı?

$\vec{N}_1 = (1,-2,1)$ $\vec{N}_2 = (2,1,-3)$ $\alpha \rightarrow$ düz. arası açı.

$$\cos(180-\alpha) = \frac{2 + (-2) + (-3)}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-3}{\sqrt{84}} \qquad \alpha = 180 - \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{84}}\right)$$

Uzayda Bir Nokt. Bir Doğ. Uzaklığı



orijinal çizim, s. 9

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t$$

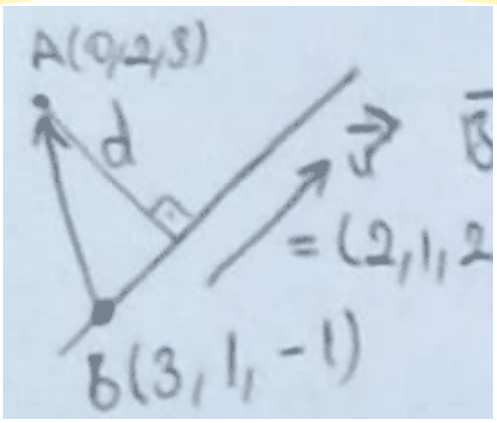
$$x = at + x_0 \qquad y = bt + y_0 \qquad z = ct + z_0$$

1. adım: $\overrightarrow{BA}$ elde edilir.

2. adım: $\|\overrightarrow{BA} \times \vec{u}\|$ bul.
3. adım: $\|\vec{u}\|$ bul.

$$d = \frac{\|\overrightarrow{BA} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

ÖR: $A(0,2,3)$ nokt. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ doğr. uzak.?



orijinal çizim, s. 9

$$\overrightarrow{BA} = (-3,1,4)$$

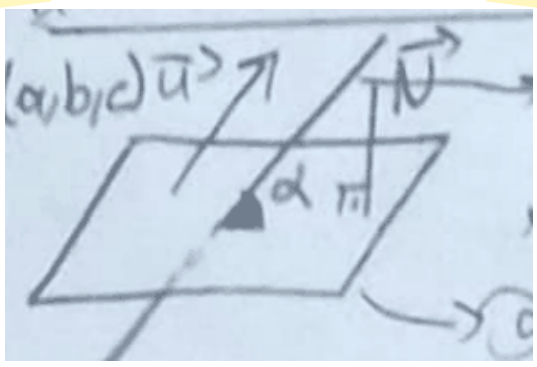
$$\overrightarrow{BA} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 14j - 5k$$

$$= (-2,14,-5)$$

$$\|\overrightarrow{BA} \times \vec{u}\| = 15 \qquad \|\vec{u}\| = 3$$

$$d = \frac{15}{3} = \boxed{5}$$

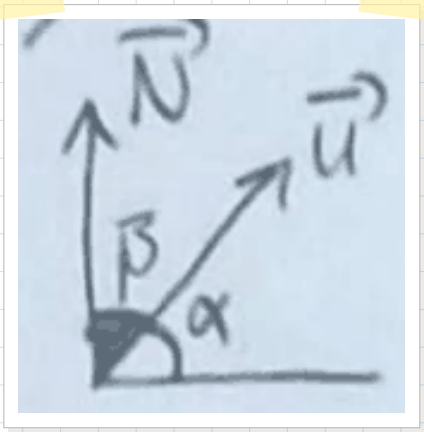
Uzayda Bir Doğru İle Düzlem Arasındaki Açı



orijinal çizim, s. 9

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

$$x=at+x_0 \quad y=bt+y_0 \quad z=ct+z_0 \qquad ax+by+cz+d=0$$



orijinal çizim, s. 9

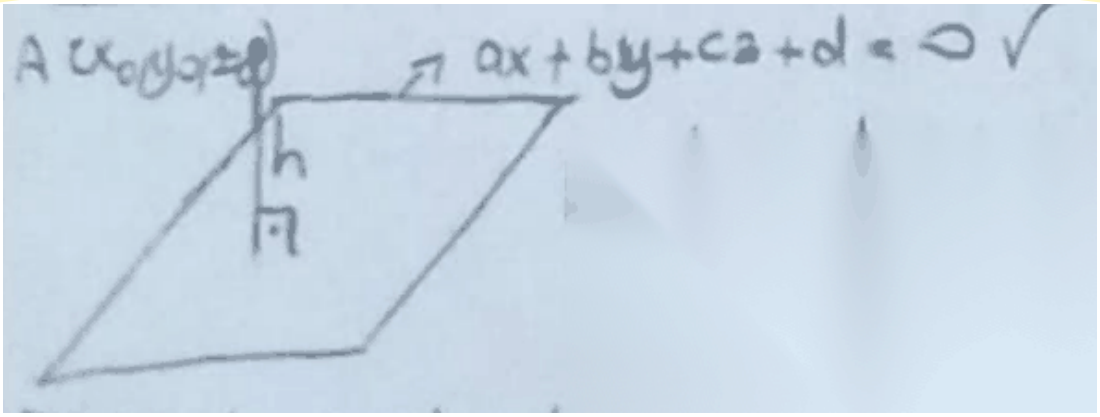
$$\cos\beta=\sin\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{N}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{N}|}$$

ÖR: Denk. $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-1}$ ol. doğ. ile $2x+y-z+3=0$ düz. arası açı?

$$\vec{u}=(5,3,-1) \qquad \vec{N}=(2,1,-1)$$

$$\sin\alpha=\frac{10+3+1}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{6}}=\frac{14}{\sqrt{210}} \qquad \alpha=\arcsin\left(\frac{14}{\sqrt{210}}\right)$$

Bir Noktanın Bir Düzleme Olan Uzaklığı Bulma



orijinal çizim, s. 9

$$ax+by+cz+d=0 \ \checkmark$$

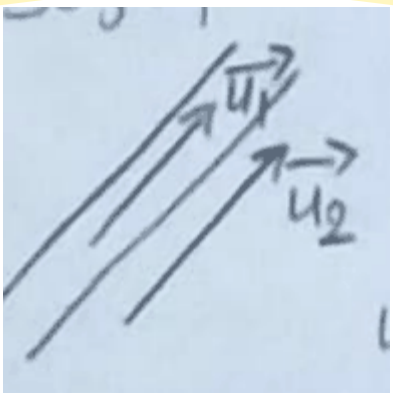
$$h=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ÖR: $A(1,-2,5)$ nokt. $3x+4y-12z+17=0$ düzl. uzakl.?

$$h=\frac{|3-8-60+17|}{\sqrt{9+16+144}}=\frac{48}{13}$$

Uzayda Doğru Birbirine Göre Durumları

Doğ. paralel ise Doğrultman vekt. de paraleldir



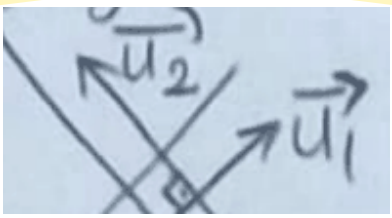
orijinal çizim, s. 9

$$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \qquad \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

$$\vec{v}_1=(a_1,b_1,c_1) \qquad \vec{v}=(a,b,c) \qquad \vec{v}_2=(a_2,b_2,c_2)$$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

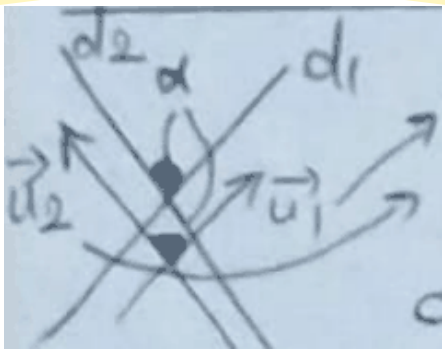
Doğ. dik ise Doğrultman vekt. de diktir.



orijinal çizim, s. 9

$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \qquad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

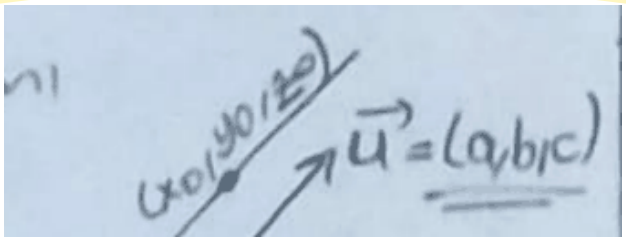
Uzayda İki Doğru Arasındaki Açı



orijinal çizim, s. 9

d_1'in doğrultmanı (Paralel vektörü)
d_2'nin doğrultmanı

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}$$



orijinal çizim, s. 9

$$x = at + x_0 \qquad y = bt + y_0 \qquad z = ct + z_0$$

ÖR: $l_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-5}{-2}$ $\qquad \vec{v}_1 = (3,4,-2)$

$$l_2 : x = 3t - 5, \quad y = 2t + 1, \quad z = t - 3 \rightarrow \vec{v}_2 = (3,2,1)$$

$$\cos\alpha = \frac{9 + 8 - 2}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{14}}$$

İki Düz. Birbirine Göre Durumları

İki düzlem paralel ise normalleri de paraleldir.

$$\vec{N}_1 = (a_1, b_1, c_1) \parallel \vec{N}_2 = (a_2, b_2, c_2) \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

İki düzlem dik ise norm. de diktir.

$$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \qquad \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$$

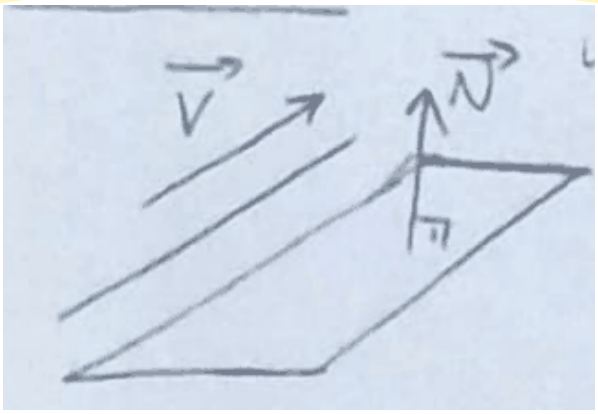
ÖR: $2x - 3y + 5z = 10$ ile $(a-1)x + by + 10z = 3$ paralel. $a, b = ?$

$$\frac{2}{a-1} = \frac{-3}{b} = \frac{5}{10} \qquad a = 5 \quad b = -6$$

orj. s. 10

Uzayda Bir Doğru ve Bir Düzlemin Birbirine Göre Durumları

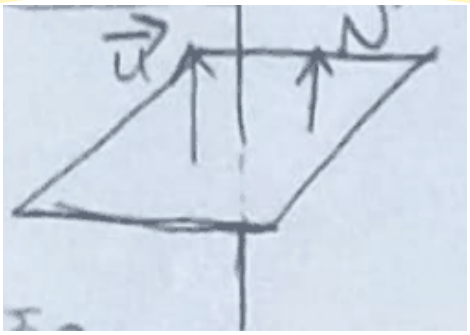
1. Paralel → normal vekt. ile doğrultman vek. birbirine dik olur.



orijinal çizim, s. 10

$$\vec{u} \cdot \vec{N} = 0$$

2. Dik → normal vek. ile doğrultman vek. birbirine paralel olur.



orijinal çizim, s. 10

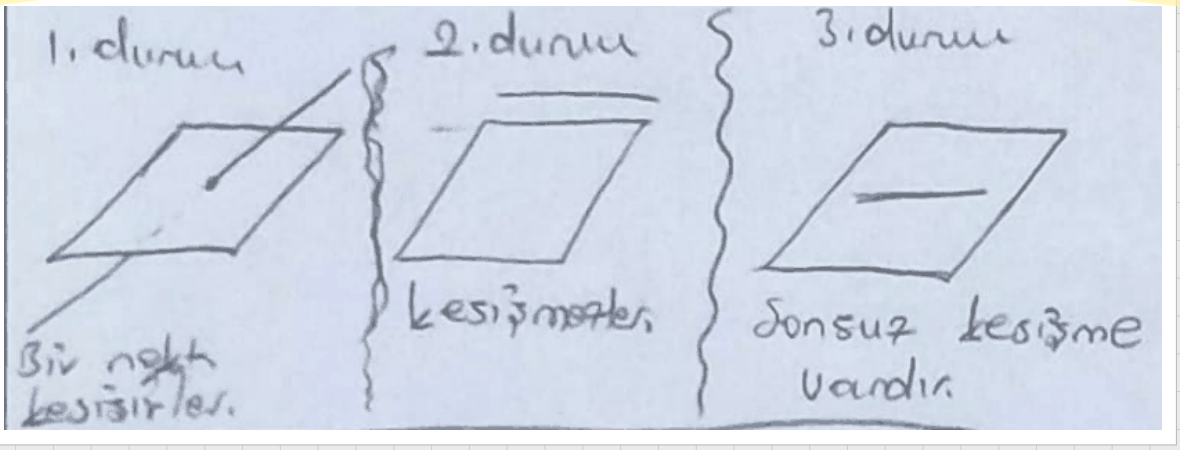
$$\vec{u} \parallel \vec{N}$$

ÖR: $2x - 3y + 4z = 5$ düz. $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{m}$ doğ. paralel. $m = ?$

$$\vec{N} = (2,-3,4) \qquad \vec{u} = (3,4,m)$$

$$\vec{N} \perp \vec{u} \qquad 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot m = 0 \qquad m = \frac{3}{2}$$

Bir Doğru İle Bir Düzlemin Kesişme Nokt. Bulma



orijinal çizim, s. 10

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \qquad \begin{aligned} x &= at+x_0 \\ y &= bt+y_0 \\ z &= ct+z_0 \end{aligned}$$ Doğru denklemi

$$ax+by+cz+d=0 \rightarrow \text{düzlem denk.}$$

- Doğru Denk. her zaman parametrik hale getirilip düzlem denk. yerine yazılır. Daha sonra buradan "t" değerini bulup x, y, z denklemlerini bulacağız.

"t"ler için birkaç durum vardır:

- 1 nokt. kesişme $\rightarrow t = \ldots$ bir sayı çıkar.
- Doğ. düzlem paralel $\rightarrow$ t'ler birbirini götürür $5 \neq 0$
- Doğ. düzlem üzerinde $\rightarrow$ t'ler " " $0 = 0$ $\{R\}$

ÖR: $2x-3y+4z=12$ düz. ile $\frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-5}{-1}$ doğ. var ise kesişme nokt.?

$$2(4t+1)-3(2t-3)+4(-t+5)=12 \qquad \begin{aligned} x &= 4t+1 \\ y &= 2t-3 \\ z &= -t+5 \end{aligned}$$

$$t=\frac{19}{2} \qquad x=39,\ y=16,\ z=-\frac{9}{2}$$

Uzayda İki Doğrunun Kesişim Nok. Bulma

ÖR: l_1: $x=4t-1,\ y=t+3,\ z=1$ ve l_2: $x=12s-13,\ y=6s+1,\ z=3s+2$ doğ. kesişiyor ise kesişme nokt.?

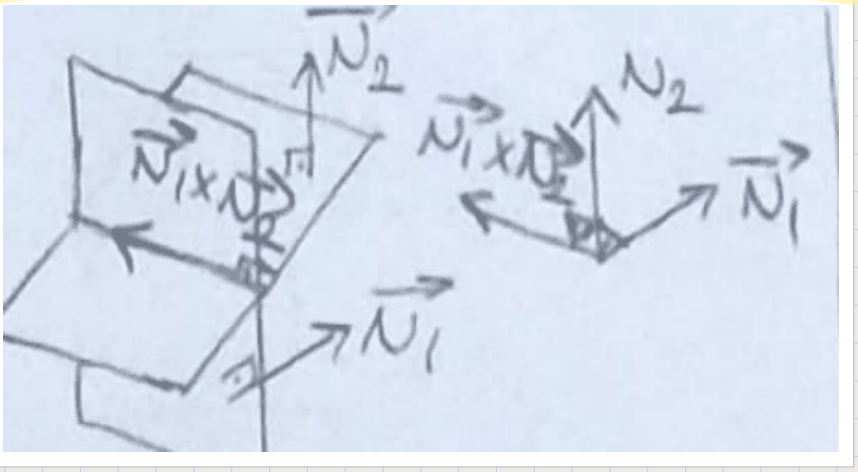
- Eğer doğrular paramet. değilse paramet. hale getirilir
- Biri t'li diğeri s'li olmalı.

$$4t-1=12s-13 \rightarrow 4t-12s=-12$$
$$t+3=6s+1 \rightarrow -2t+12s=4$$
$$t=-4, \quad s=-\frac{1}{3}$$

z'i de denk. sağladığında oluyorsa kesiş. denektir.

$$x = -17, \quad y = -1, \quad z = 1$$

İki Düzlemin Kesiştiği Doğ. Denk. Yazma



orijinal çizim, s. 10

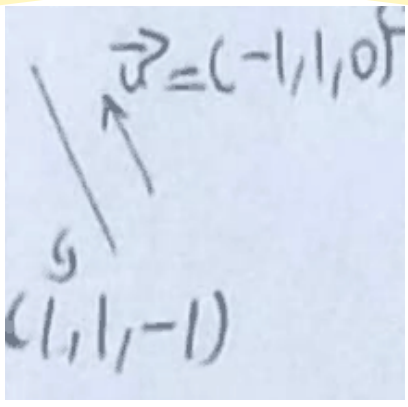
ÖR: $x + y + z = 1$ düz. ile $x + y = 2$ düz. kesiş. doğru denk.?

1. adım: $\vec{N}_1 = (1,1,1) \quad \vec{N}_2 = (1,1,0)$

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -i + j = (-1,1,0)$$

2. adım:

$$x = 1 - y - z$$
$$x = 2 - y$$
$$z = -1 \qquad y = \mathbb{R} \text{ (1 verdim)} \qquad x = 1$$

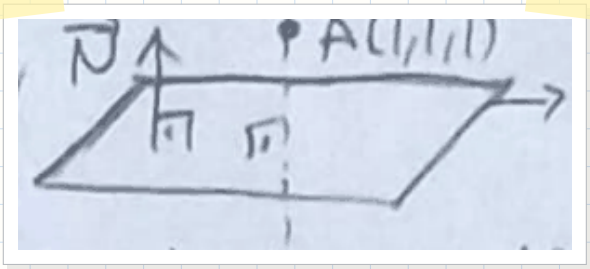


orijinal çizim, s. 10

3. adım: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1}$, $z = 0$[3] → Kapalı denkl. $\left.\begin{array}{l} x = -t+1 \\ y = 1+t \\ z = -1 \end{array}\right\}$ vekt. denkl.

Bir Düz. Dışındaki Bir Nokt. En Yakın Nokt. Koordinatlarını Bulma

ÖR: $x + y + 2z = 5$ düz. $A(1,1,1)$ nokt. en yak. old. nokt. koor. bulunuz.



orijinal çizim, s. 10

$x + y + 2z = 5$ 1. adım: düz. normal $\vec{N} = (1,1,2)$ vekt. bulunur.

2. adım: Düz. dik doğ. denklemi yazılır. (x, y, z) = Nokta + $t \cdot$ (doğrultman)

$(x, y, z) = (1,1,1) + t(1,1,2)$ $x = t + 1,\ y = t + 1,\ z = 2t + 1$

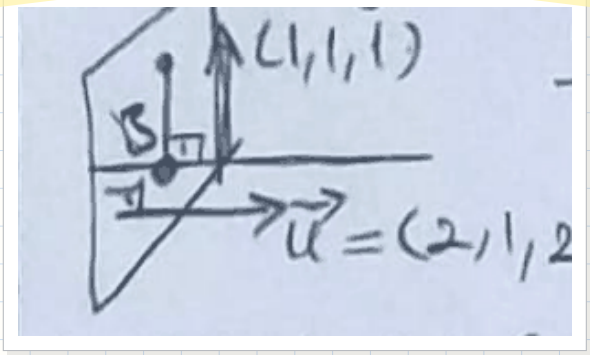
3. adım: Doğ. düz. kesişme nokt. bulunur.

$$1 + t + 1 + t + 2 \cdot (2t + 1) = 5 \qquad 6t = 1 \qquad t = \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{7}{6} \quad y = \frac{7}{6} \quad z = \frac{4}{3} \qquad \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}\right)$$

Bir Doğ. Dışındaki Bir Nokt. En Yak. Nok. Bulma

$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ doğ. üzer. hangi nokt., dışındaki $A(1,1,1)$ nokt. en yakın nokt.?



orijinal çizim, s. 10

1. adım: Doğ.'nun doğrultman (paralel) vekt. elde edilir

[3] Claude notu: muhtemelen $z = -1$ olmalı.

2. adım: Doğ. dik ol. ve $A(1,1,1)$ nokt. geçen düz. denkl. yazılır

$$(x-1)\cdot 2 + (y-1)\cdot 1 + 2(z-1) = 0$$
$$2x + y + 2z = 5 \qquad x = 2t+1,\ y = t,\ z = 2t+1$$

3. adım: Doğ. düz. kesişme nokt. bulunur.

$$2\cdot(2t+1) + y + 2\cdot(2t+1) = 5$$
$$t = \frac{1}{9} \qquad x = \frac{11}{9} \quad y = \frac{1}{9} \quad z = \frac{11}{9} \qquad B\left(\frac{11}{9}, \frac{1}{9}, \frac{11}{9}\right)$$

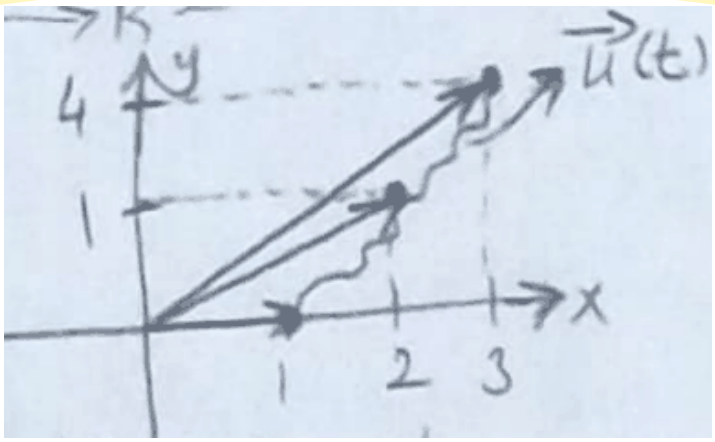
orj. s. 11

Vektör Değerli Fonksiyon

- Vektörlerin fonksiyonlaştırılmış biçimine denir.

ÖR: $\vec{u}(t) = (t+1, t^2) \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{u}(0) = (1,0) \quad t = 0$$
$$\vec{u}(1) = (2,1) \quad t = 1$$
$$\vec{u}(2) = (3,4) \quad t = 2$$



orijinal çizim, s. 11

vektörlerin uç nokt. birleştirmeyle oluş. eğriye $\vec{r}(t)$ deniyor.

$$\vec{r}(t) = \left(t^2, \ln t, \sqrt{t+1}\right) \qquad \mathbb{R}^3\text{'lü vekt. değerli fonksiyon}$$

Vektör Değerli Fonksiyonlarda Tanım Kümesi Bulma

$$\mathbb{R}^2 \Rightarrow \vec{r}(t) = (f(t), g(t)) = \langle f(t), g(t)\rangle$$
$$\mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$$

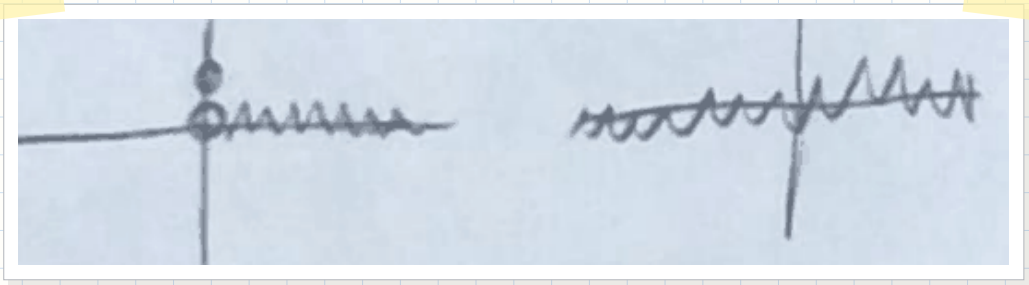
$$\vec{r}(t) = \left(t^2+1, \frac{1}{t-3}\right) \qquad / \qquad \vec{r}(t) = \left(\ln t, \frac{1}{t-3}, t+5\right)$$

$$\vec{r}(t) = (\quad f(t),\ g(t))$$
$$\downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow$$
$$D_1 \cap D_2 \text{ Domain} \quad D_1 \quad D_2$$

$$\vec{r}(t) = (\quad f(t),\ g(t),\ h(t))$$
$$\downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$D_1 \cap D_2 \cap D_3 \quad D_1 \quad D_2 \quad D_3$$

ÖR: $\vec{r}(t) = \left(t^2+1, \frac{1}{t-3}\right)$ Tanım Kümesi $= \mathbb{R} - \{3\}$ $D_1 = \mathbb{R}$, $D_2 = \mathbb{R} - \{3\}$

ÖR: $\vec{r}(t) = \left(\ln t, \frac{1}{t-3}, t+5\right)$ $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ $D_1 = (0,\infty)$, $D_2 = \mathbb{R} - \{3\}$, $D_3 = \mathbb{R}$



orijinal çizim, s. 11

$$D_1 \cap D_2 \cap D_3 = (0,\infty) - \{3\}$$

Vektör Değerli Fonksiyonların Limiti

$$\mathbb{R}^2 \to \vec{r}(t) = (f(t), g(t))$$
$$\mathbb{R}^3 \to \vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$$

$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to a} f(t),\ \lim_{t\to a} g(t)\right)$$
$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to a} f(t),\ \lim_{t\to a} g(t),\ \lim_{t\to a} h(t)\right)$$

Herhangi birinin limiti yoktur ise vektör değerli fonks. o nokt. limiti yoktur.

ÖR: $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{t}, t^2 - 2t + 1\right)$ a) $\lim_{t\to 3} \vec{r}(t)$ b) $\lim_{t\to\infty} \vec{r}(t)$ c) $\lim_{t\to 0} \vec{r}(t)$

$$\text{c) } \lim_{t\to 0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t},\ \lim_{t\to 0} (t^2 - 2t + 1)\right) \to 1$$

$$\frac{1}{0} \to \begin{cases} \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} = \infty \\ \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t} = -\infty \end{cases} \quad \text{limit yok} \qquad \text{limiti yoktur.}$$

$$\text{a) } \lim_{t\to 3} \vec{r}(t) = \left(\frac{1}{3}, 4\right)$$
$$\text{b) } \lim_{t\to\infty} \vec{r}(t) : \left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t},\ \lim_{t\to\infty} (t^2 - 2t + 1)\right) = (0,\infty)$$

Vektör Değerli Fonks. Türevi

$$\mathbb{R}^3 \to \frac{d}{dt}\left(\vec{r}(t)\right) = \vec{r}\,'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$$

$\mathbb{R}^2 \to \vec{r}\,'(t) = (f'(x), g'(x))$[4]

ÖR: $\vec{r}(t) = (\ln(3t+1), \tan t, t^3 - 4t + 1)$

$\vec{r}\,'(t) = \left(3 \cdot \frac{1}{3t+1},\ 1 + \tan^2(t),\ 3t - 4\right)$[5]

$$\vec{r}\,'(1) = \left(\frac{3}{4},\ 1 + \tan^2(1),\ -1\right)$$

Vektör Değerli Fonksiyonların İntegrali

$$\mathbb{R}^2 \to \text{Belirsiz integral} \to \int \vec{r}(t)\,dt = \left(\int f(t)\,dt,\ \int g(t)\,dt\right)$$

$$\mathbb{R}^3 \to \text{Belirli integral} \to \int_a^b \vec{r}(t)\,dt$$

$$= \left(\int_a^b f(t)\,dt,\ \int_a^b g(t)\,dt,\ \int_a^b h(t)\,dt\right)$$

ÖR: $\vec{r}(t) = \left(2t+1, \frac{1}{t}, e^t\right)$ $\int \vec{r}(t)\,dt = ?$

$$\int \vec{r}(t)\,dt = \left(t^2 + t + c_1,\ \ln|t| + c_2,\ e^t + c_3\right)$$

$$= \left(t^2 + t,\ \ln|t|,\ e^t\right) + (c_1, c_2, c_3)$$

ÖR: $\vec{r}(t) = \left(t - 2, \sin t, \frac{1}{t+3}\right)$ $\int_1^2 \vec{r}(t)\,dt = ?$

$$\int_1^2 \vec{r}(t)\,dt = \left(\left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_1^2,\ \left[-\cos t\right]_1^2,\ \left[\ln|t+3|\right]_1^2\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2},\ \cos 1 - \cos 2,\ \ln 5 - \ln 4\right)$$

Teğet Vektör ve Birim Teğet Vektör

$\mathbb{R}^2 \to$ Teğet Vektör: $\vec{r}\,'(t) = (f'(t), g'(t))$

$\to$ Birim Teğet vekt.: $T = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$

$\mathbb{R}^3$'te de aynıdır. $\vec{r}\,'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$

ÖR: $\vec{r}(t) = (2t+1, t^2, \ln t)$

a) Teğet vekt. $\to \vec{r}\,'(t) = \left(2, 2t, \frac{1}{t}\right)$

[4] Claude notu: muhtemelen $(f'(t), g'(t))$ olmalı.
[5] Claude notu: muhtemelen üçüncü bileşen $3t^2 - 4$ olmalı.

b) Birim Teğet vekt. →

$$T(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\left(2, 2t, \frac{1}{t}\right)}{\sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}}}$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\frac{4t^4+4t^2+1}{t^2}}}, \frac{2t}{\sqrt{\frac{4t^4+4t^2+1}{t^2}}}, \frac{1}{t\sqrt{\frac{4t^4+4t^2+1}{t^2}}} \right)$$

c) $t = 2$ için teğet vekt. ve Bir. Teğ. vekt. ?

$$\vec{r}'(2) = \left(2, 4, \frac{1}{2}\right) \qquad T(2) = \left(\frac{2}{\frac{9}{2}}, \frac{4}{\frac{9}{2}}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{2}} \right) = \left(\frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{9} \right)$$

Normal Vektör ve Birim Normal Vektör

Normal vektör, Birim teğet vekt. türevine eşittir.

→ $T'(t)$ Birim Normal vekt.: $\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$

Birim Normal vekt. olab. için $\vec{T}'(t) \neq 0$.

ÖR: $\vec{r}(t) = (2t, t^2, t^3)$

a) Normal vekt. $\Rightarrow \vec{r}'(t) = (2, 2t, 3t^2) \rightarrow \vec{T}(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 4}}, \frac{2t}{\text{? okunamadı}}, \frac{3t^2}{\text{? okunamadı}} \right)$

$$T'(t) = \left(\frac{-8t + 16t^3}{(4 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}, \frac{2 - 8t^2 - 36t^4}{(4 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}, \frac{6t - 12t^3 - 54t^5}{(4 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}} \right)$$

orj. s. 12

İkinci Dik Vektör

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) \qquad \vec{B}(t) \perp \vec{T}(t), \quad \vec{B}(t) \perp \vec{N}(t)$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \quad \text{(Birim Teğet vekt.)}$$

$\vec{T}'(t) \rightarrow$ dik vektör (normal vekt.)

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$$

ÖR: $\vec{r}(t) = (t, 3\sin t, 3\cos t)$ ikinci dik vekt.?

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{(1, 3\cos t, -3\sin t)}{\sqrt{10}}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \frac{\left(0, \frac{-3\sin t}{\sqrt{10}}, \frac{-3\cos t}{\sqrt{10}}\right)}{\frac{3}{\sqrt{10}}} \rightarrow (0, -\sin t, -\cos t)$$

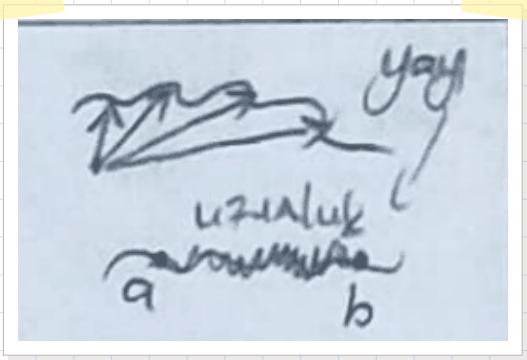
$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3\cos t}{\sqrt{10}} & \frac{-3\sin t}{\sqrt{10}} \\ 0 & -\sin t & -\cos t \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{10}}\, i + \frac{1}{\sqrt{10}} \cos t\, j - \frac{1}{\sqrt{10}} \sin t\, k$$

$$= \left(-\frac{3}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{\sqrt{10}} \cos t,\ -\frac{1}{10} \sin t \right)$$ [6]

Vektör Değerli Fonks. Yay Uzunluğu Bulma

$$\mathbb{R}^2 \to \vec{r}(t) = (f(t), g(t)), \quad a \le t \le b$$



orijinal çizim, s. 12

$$\text{Yay uzunluğu} = \int_a^b \|r'(t)\|\, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt$$

$$\mathbb{R}^3 \to \text{yay uzun.:} \quad \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}\, dt$$

ÖR: $\vec{r}(t) = (2t, 3\sin(2t), 3\cos(2t))$, $0 \le t \le 2\pi$? *ilgili* vekt. değ. fonks. yay uzunluğu?

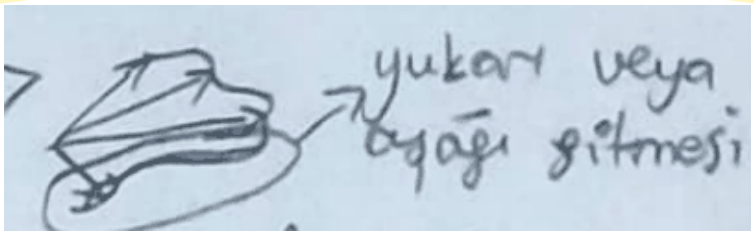
$$\text{Yay uzunluğu} = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 + 36\cos^2 2t + 36\sin^2 2t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{40}\, dt$$

$$= \sqrt{40}\, t \Big|_0^{2\pi} = 4\sqrt{10}\,\pi \qquad \vec{r}'(t) = (2, 6\cos 2t, -6\sin 2t)$$

Eğrilik (Curvature)

Bir vektör değerli fonksiyonun ($\vec{r}(t)$) temsil ettiği eğrinin yön değiştirme hızına eğrilik denir.

[6] Claude notu: muhtemelen son bileşen $-\frac{1}{\sqrt{10}} \sin t$ olmalı.



orijinal çizim, s. 12

$$\vec{r}(t) = (f(t), g(t))$$
$$\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$$

$$K = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|} \rightarrow r'(t) \neq 0 \qquad \text{(1. formül)}$$

$$K = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \qquad \text{(2. formül)}$$

ÖR: $\vec{r}(t) = (t, 3\sin t, 3\cos t)$, Eğrilik = ?

$$\vec{r}'(t) = (1, 3\cos t, -3\sin t)$$
$$\vec{r}''(t) = (0, -3\sin t, -3\cos t)$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3\cos t & -3\sin t \\ 0 & -3\sin t & -3\cos t \end{vmatrix}$$
$$= -9i + 3\cos t\, j - 3\sin t\, k$$
$$= (-9, 3\cos t, -3\sin t)$$

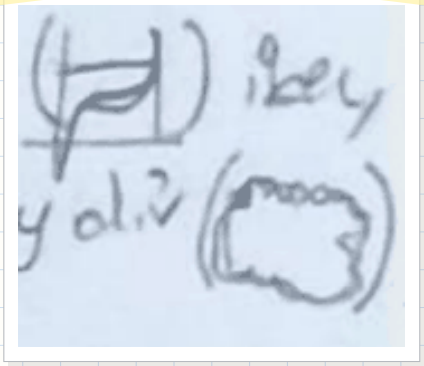
$$\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| = \sqrt{81 + 9\cos^2 t + 9\sin^2 t} = 3\sqrt{10}$$
$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1 + 9\cos^2 t + 9\sin^2 t} = \sqrt{10}$$
$$K = \frac{3\sqrt{10}}{(\sqrt{10})^3} = \frac{3}{10}$$

Çok Değişkenli Fonksiyonlar

$f(x) = x^2 + 8$ ↓ Tek girdiye sahip fonk. lara tek değişkenli fonksiyon denir
$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ↓ iki değişkenli fonksiyon
$f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z + 5$ ↓ üç değişkenli fonksiyon

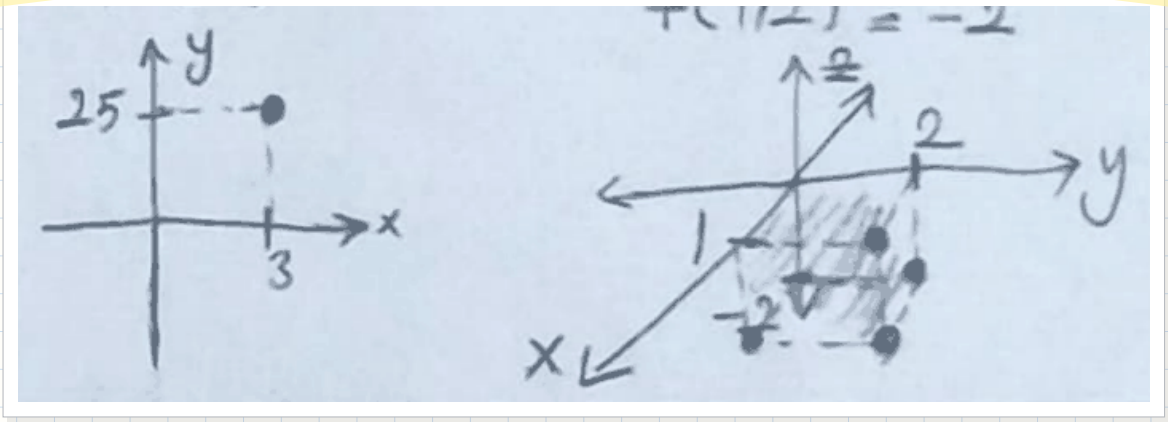
Değişken sayısı 2 ve daha fazla olan fonksiyonlara çok değişkenli fonksiyon denir.
Calc-1 → tek değ. fonks. ların limit, türev, integrali
Calc-2 → çok " " " "

Tek. değ. fonklarda sonuç bir eğri iken çok değ. fonklarda sonuç bir yüzey dir



orijinal çizim, s. 12

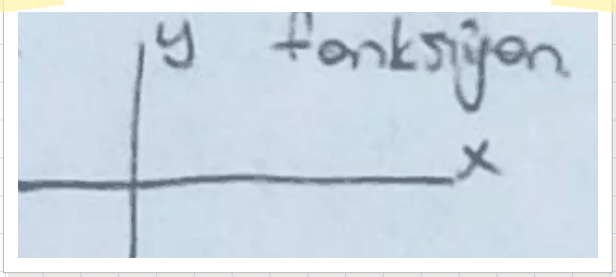
ÖR: $f(x) = 3x^2 - x + 1$ $f(x,y) = x^2 - 2xy + 1$
$f(3) = 25$ $f(1,2) = -2$



orijinal çizim, s. 12

Çok Değişkenli Fonks. da Tanım Kümesi Bulma

$f(x)$ = tek değişkenli fonksiyon

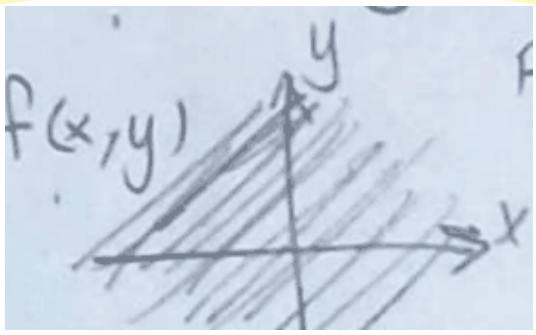


orijinal çizim, s. 12

$f(x,y)$
$f(x,y,z)$
$f(x,y,z,t)$
$\vdots$
} çok değişkenli fonksiyonlar

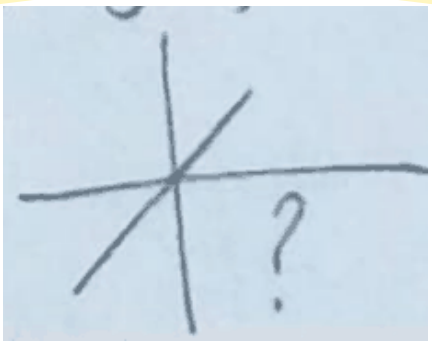
R – tanımsız yapanlar

$f(x, y)$: $\mathbb{R}^2$ – tanımsız yapanlar



orijinal çizim, s. 12

$f(x, y, z) = \ldots$



orijinal çizim, s. 12

ÖR: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3$ Tanım K.? Tanım Kümesi $\rightarrow \mathbb{R}^2$



orijinal çizim, s. 12

ÖR: $f(x, y) = \dfrac{y}{x-3}$
$\rightarrow x - 3 = 0 \quad x \neq 3$

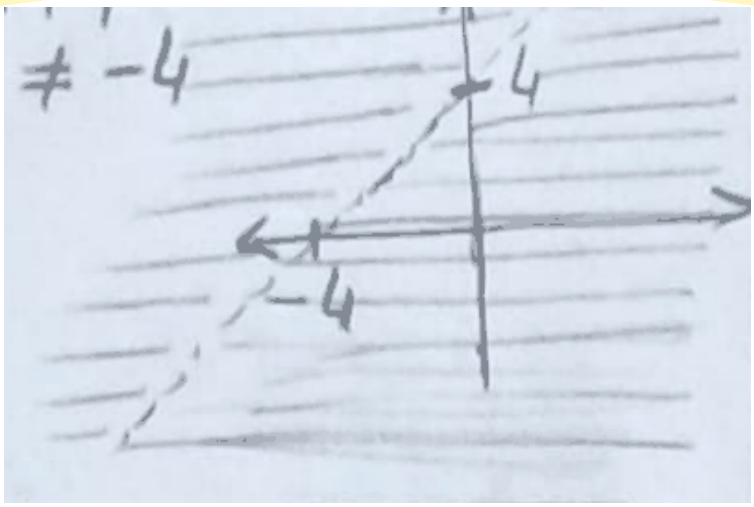


orijinal çizim, s. 12

orj. s. 13

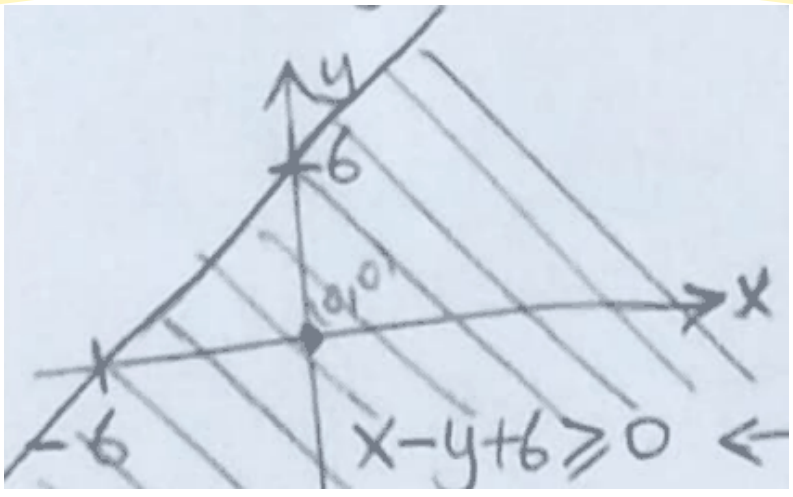
Çok Değ. Fonk. Tanım Kümesi Bulma (devamı)

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x - y + 4} \rightarrow x - y + 4 \neq 0, \quad x - y \neq -4$$



orijinal çizim, s. 13

$$f(x,y) = \sqrt{x - y + 6} \leftarrow x - y + 6 \geq 0$$
$$0 \quad 0$$



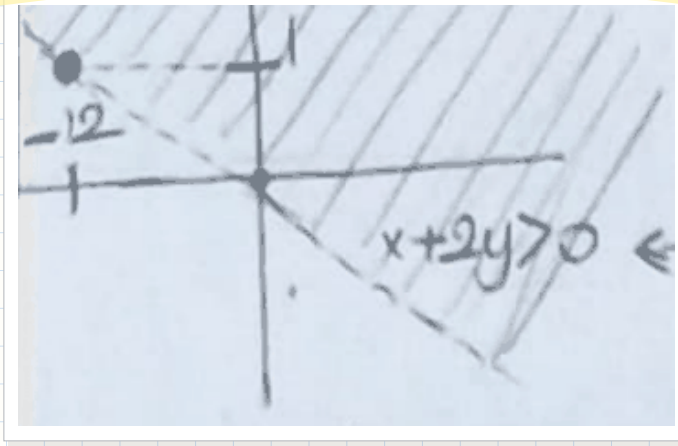
orijinal çizim, s. 13

$$f(x,y) = \frac{2x}{y - x^2} \rightarrow \begin{array}{l} y - x^2 = 0 \\ y = x^2 \\ \underline{y \neq x^2} \end{array}$$



orijinal çizim, s. 13

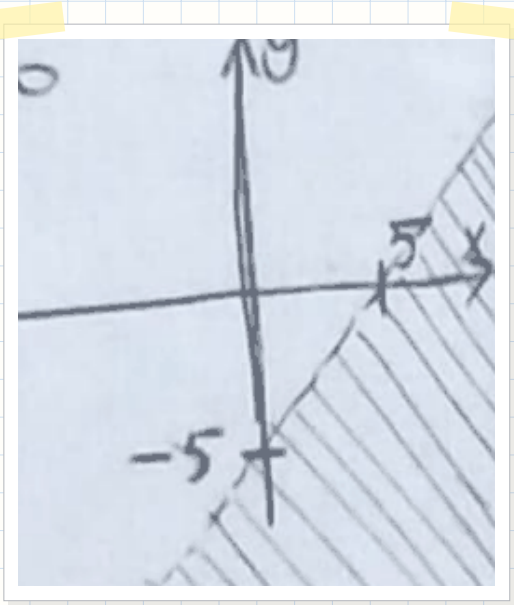
$$x + 2y > 0 \;\leftarrow\; f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+2y}}$$



orijinal çizim, s. 13

$$f(x,y) = \ln(x-y-5) \;\rightarrow\; x-y-5>0 \qquad \underset{0}{x} - \underset{0}{y} > 5$$

$$\log_a b: \quad b>0, \quad a \neq 1, \quad a>0$$

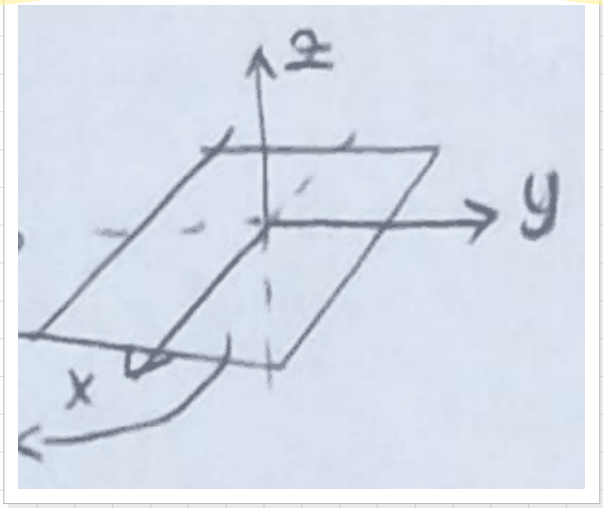


orijinal çizim, s. 13

Bu ifadeyi tanımsız yapabilecek hiçbir şey yoktur ← $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4z$
Girdileri üç boyutlu old. dolayı $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ T.K.

$$f(x,y,z) = \frac{2x}{y-z} \qquad y - z \neq 0, \quad y \neq z$$

Bunun dışındaki tüm (x,y,z)'ler tanım kümesinde yer alır.

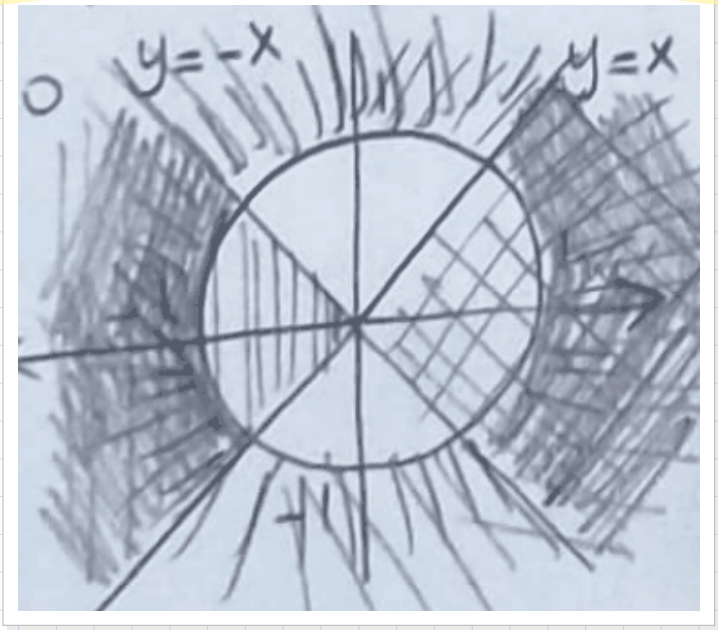


orijinal çizim, s. 13

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \qquad \text{T.K.=?}$$

$$x^2 - y^2 \geq 0 \cap x^2 + y^2 - 1 \geq 0$$

$x^2 \geq y^2$	$x^2 + y^2 \geq 1$	1	0
$x^2 = y^2$	$x^2 + y^2 = 1$	0	1
$x = y$		-1	0
$x = -y$		0	-1

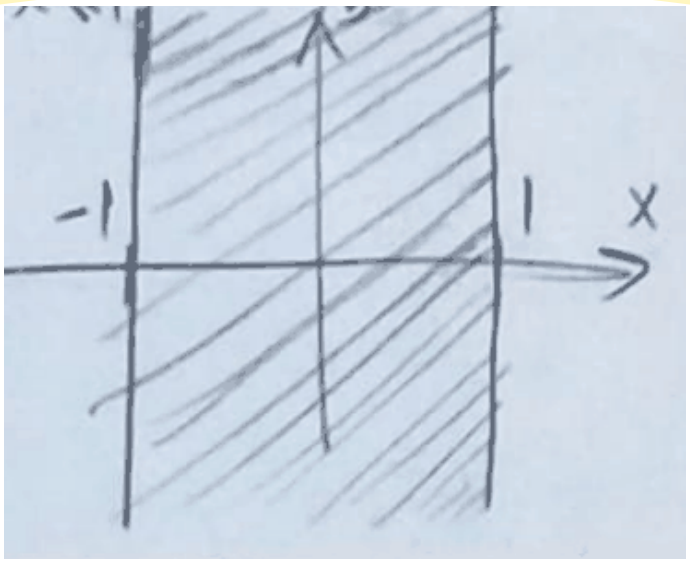


orijinal çizim, s. 13

$$f(x,y) = y + \arccos x \qquad \text{T.K.=?}$$

$$\left.\begin{matrix}\arcsin x \\ \arccos x\end{matrix}\right\} -1 \le x \le 1 \qquad y \in R \qquad -1 \le x \le 1$$

$\arcsin 2 \rightarrow$ tanımsız



orijinal çizim, s. 13

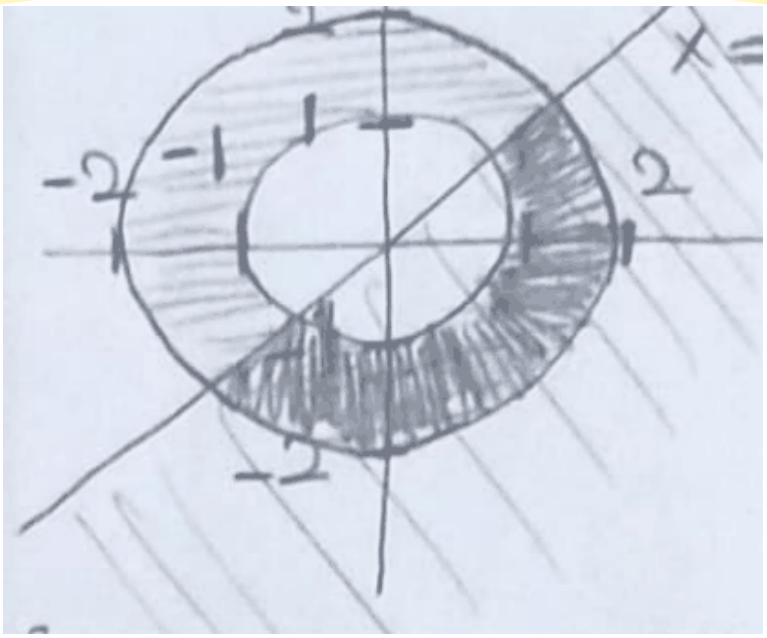
$$f(x,y) = \frac{\ln(x-y)}{\sqrt{4-x^2-y^2}\sqrt{x^2+y^2-1}} \qquad \text{T.K.=?}$$

$$x - y > 0 \rightarrow x > y \rightarrow x = y$$

$$4 - x^2 - y^2 > 0 \rightarrow 4 > x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 - 1 > 0 \rightarrow x^2 + y^2 > 1$$

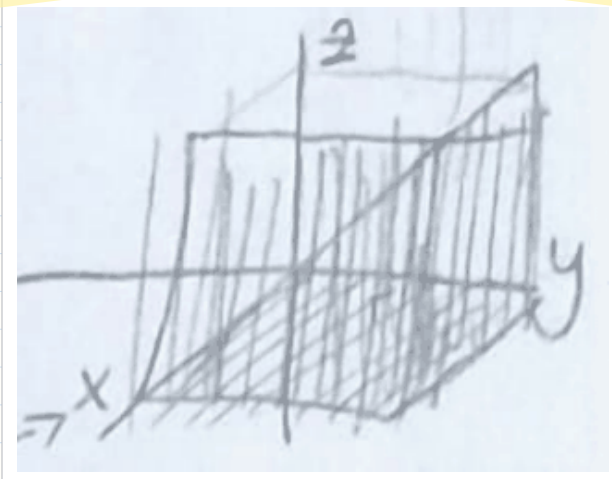
$1 < x^2 + y^2 < 4 \rightarrow$ Halka $\quad M(0,0), \quad r_1 = 1, \; r_2 = 2$



orijinal çizim, s. 13

$f(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ T.K.=?

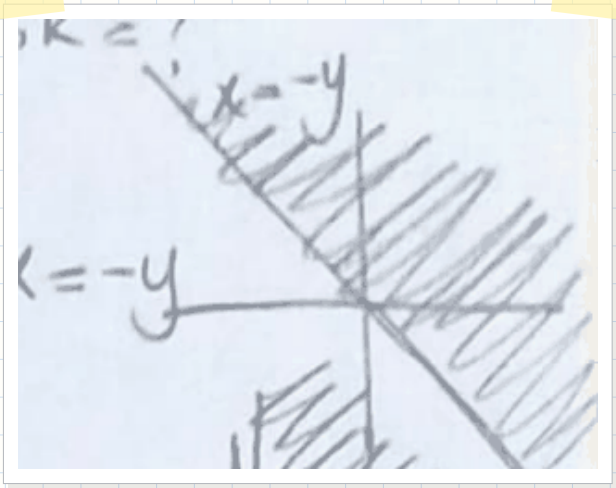
$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad z \geq 0$



orijinal çizim, s. 13

$f(x,y) = \ln(x+y) \rightarrow x + y > 0 \rightarrow x = -y$

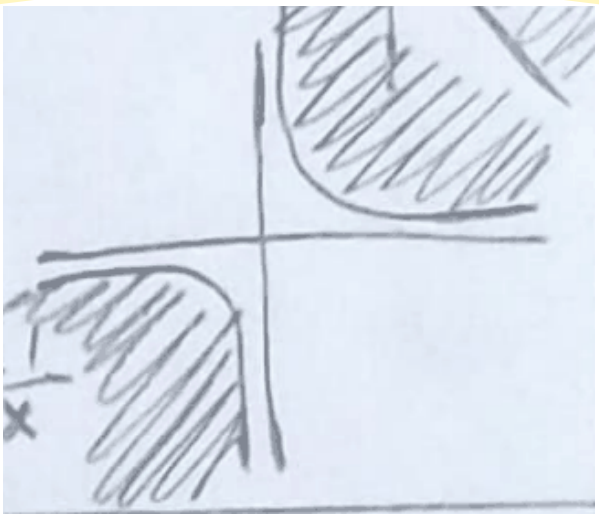
0	3
3	0



orijinal çizim, s. 13

$f(x,y) = \sqrt{xy-1} \rightarrow xy - 1 \geq 0$
$0 \quad 0$

$xy - 1 = 0$
$xy = 1, \quad y = \frac{1}{x}$



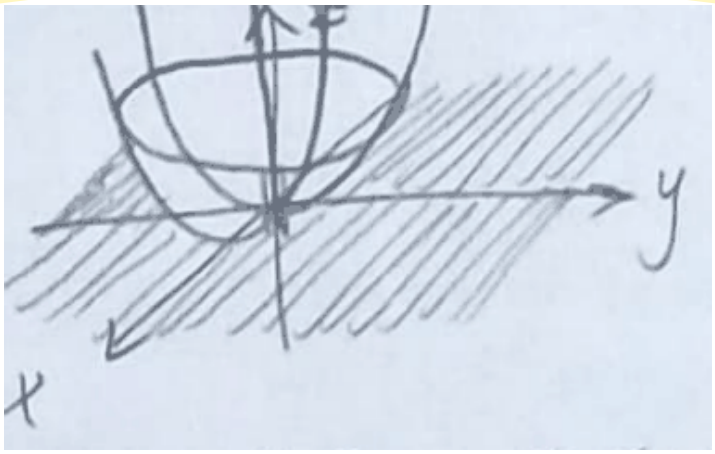
orijinal çizim, s. 13

Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Görüntü Kümesi (Range) Bulma

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \rightarrow \text{paraboloid} \Rightarrow R^3$$

$x = 0,\ y = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = 0$ en küçük $\qquad x^2 + y^2 > 0$

$$G = [0, +\infty)$$

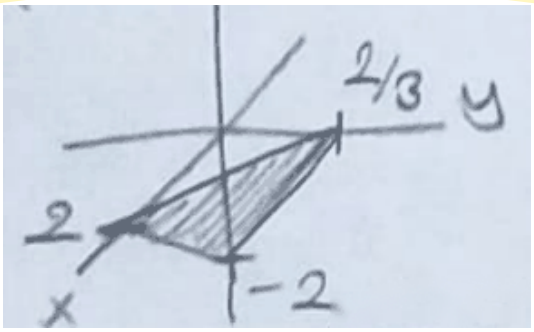


orijinal çizim, s. 13

$f(x,y) = x + 3y - 2$ G.K.?

$$\begin{array}{r} -\infty < x < \infty \\ -\infty < 3y < \infty \\ \hline -\infty < x + 3y - 2 < \infty \end{array}$$

$G.K = (-\infty, \infty)$



orijinal çizim, s. 13

$$f(x,y) = \underset{3}{\overset{0}{\boxed{x^2 + y^2}}} + 3 \quad G.K.=? \qquad G.K = [3, +\infty)$$

$$f(x,y) = \underset{-5}{\overset{0}{\boxed{\sqrt{x^2 + 4y^2}}}} - 5 \quad G.K.=? \qquad G.K = [-5, +\infty)$$

$f(x,y) = x \cdot y + 1$ G.K.=? $\quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$

$-\infty < x \cdot y < \infty \Rightarrow \underline{-\infty < x \cdot y + 1 < \infty} \qquad G.K = (-\infty, \infty)$

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad G.K.=? \qquad x \neq 0, \quad y \neq 0$$

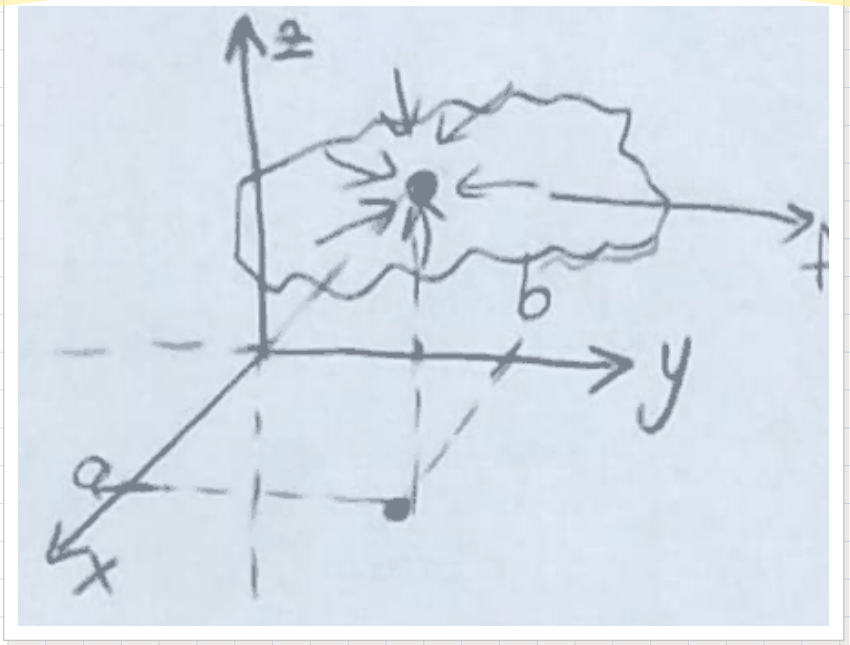
$x^2 + y^2 > 0 \rightarrow$ sonuç sıfıra yaklaşır (sonsuzda) $\qquad G.K = (0, \infty)$

orj. s. 14

Çok Değiş. Fonks. da Limit

$\lim_{x \to a} f(x)$ → Calc-1 → Tek değ. fonks.

$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y)$ → Calc-2 → Çok değ. fonks. → bir yüzeyi belirtir.



orijinal çizim, s. 14

$$x = a \text{ boyunca} \Rightarrow \lim_{y \to b} f(a,y) = \dots$$

$$x = b \text{ boyunca}^{7} \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x,b) = \dots$$

$$y = \frac{b}{a}x \text{ boyunca} \Rightarrow \lim_{x \to a} f\left(x, \frac{b}{a}x\right) = \dots$$

Her yönden yaklaşıp limitlerin sonuçların aynı çıkması beklenir

1. Fonks. gibi davranan çok değ. limitler:

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

2. $\frac{0}{0}$ belirsizliği ile karşılaşılınca:

2.1 Çarpanlarına ayırma ile sadeleşme
2.2 içinde kök varsa eşlenik çarpımı yapıp ardından sadeleşme
2.3 Kutupsal dönüşüm uygulayarak sadeleşme arama
2.4 0 noktada limitin varolmadığını ispatlamak için çeşitli yönlerden yaklaşacağız.

3. ε, δ'lı formül ile bir noktada limitin varolduğunu ispatlama.

[7] Claude notu: muhtemelen $y = b$ boyunca olmalı.

Fonksiyon Gibi Davranan Çok Değişkenli Limitler

(a, b) sıralı ikilisi $f(x, y)$ fonksiyonunu tanımsız yapmaz ise o limit fonksiyon gibi davranır.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x - 3y + 4) = 1 - 6 + 4 = -1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x + 2y^2 + 3}{y^2 - 4}\right) = \frac{3}{-4}$$

Çok Değ. Limitlerde 0/0 Belirsizliğinden Çarpanlara Ayırma ile Kurtarma

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{2x + 2y}\right) = \frac{0}{0} \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x - y)(x + y)}{2(x + y)} = \frac{x - y}{2}$$

$$0 = \frac{0 - 0}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^2 - xy - y^2}{x^2 - y^2} = ? = \frac{0}{0}$$

$$\to \frac{(x - y)(2x + y)}{(x - y)(x + y)} = \frac{2x + y}{x + y} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,-2)} \left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}\right) = \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{(x - y)(x + y)}$$

$$= \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y} = \frac{12}{4} = \boxed{3}$$

Çok Değ. Limit. de 0/0 Belirsiz. Eşlenik Çarpımı ile Kurtulma

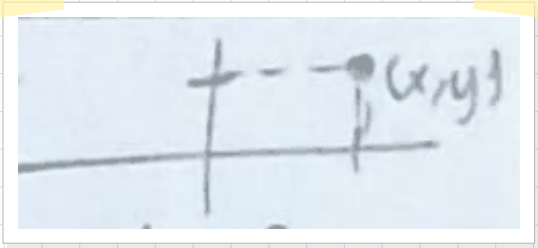
Kök içeren $\frac{0}{0}$ belirsizliklerinde eşlenik çarpımı kullanılır.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}\right) = ? \frac{0}{0}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)}{(x^2 + y^2)} = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1 = 2$$

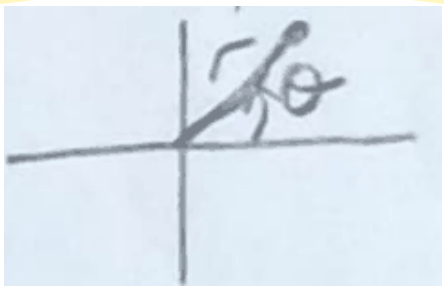
Çok Değ. Limit. de 0/0 Belirsiz. de Kutupsal Dönüşüm Yöntemi

$(x, y) \to$ kartezyen koordinatlar



orijinal çizim, s. 14

$(r, \theta) \rightarrow$ kutupsal koordinatlar



orijinal çizim, s. 14

$$f(x,y) \xrightarrow[\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ x^2+y^2=r^2}]{} f(r,\theta)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right) = ? = \frac{0}{0} \rightarrow$$

Çarpanlara ayırma ×
eşlenik çarpım ×
kutupsal dönüşüm

$$\left.\begin{aligned} r\cos\theta = 0 \\ r\sin\theta = 0 \end{aligned}\right\}$$ θ'nın aynı olm. dolayı her iki $(\sin\theta, \cos\theta)$ durumunu da 0 yapamayacağından limit r'ye bağlı olarak devam eder.

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)$$

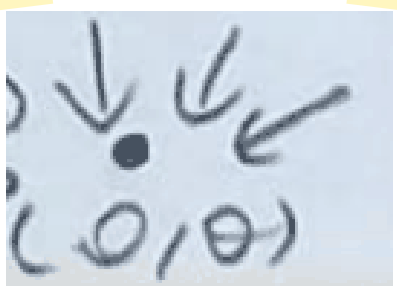
$= r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) \rightarrow$ sonuç $\cos\theta$'ya ve $\sin\theta$'ya bağlı çıkarsa limit yoktur.
$= 0 \quad \rightarrow$ sonuç sayı çıkarsa limit vardır ve 0 olur.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2y^2}{x^4+3y^4}\right) = ? \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta \cdot r^2\sin^2\theta}{r^4\cos^4\theta + 3r^4\sin^4\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^4(\cos^4\theta + 3\sin^4\theta)}$$

$= \dfrac{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta}{\cos^4\theta + 3\sin^4\theta} \rightarrow \theta$'nın aldığı sonuçlara göre (0,0) nokt. da farklı sonuçlar elde ederiz.
$\rightarrow (0,\theta) \quad \hookrightarrow$ Limiti yoktur.



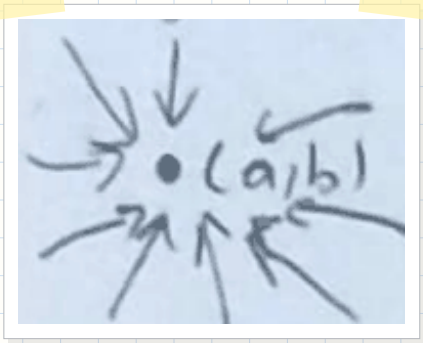
orijinal çizim, s. 14

orj. s. 15

Çok Değ. Limitlerde 0/0 Bel. siz. de Limitin Varolmadığını İspatlama

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \frac{0}{0}$$

→ Çarpanlara ayırma
→ eşlenik çarpımı
→ kutupsal dönüşüm yöntemi
→ limitin varolmadığını ispatlamak



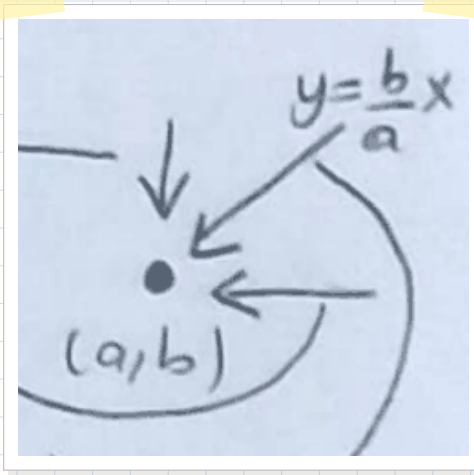
orijinal çizim, s. 15

Çeşitli yönlerden yaklaşılan bir noktada eğer yönlerin limitleri farklı çıkarsa bu noktada limit yoktur, eğer limitleri aynı çıkarsa limitin varlığı buradan tespit edilemez.

$x = a$ boyunca $\quad \lim_{y\to b} f(a,y)$

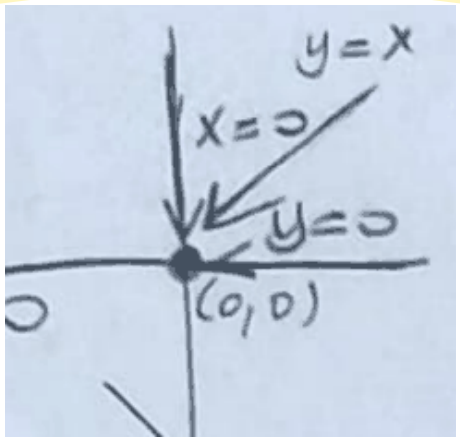
$y = b$ boyunca $\quad \lim_{x\to a} f(x,b)$

$y = \frac{b}{a}x$ boyunca $\quad \lim_{x\to a} f\left(x, \frac{b}{a}x\right)$



orijinal çizim, s. 15

ÖR: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+3y^4} = \frac{0}{0}$



orijinal çizim, s. 15

$$x = 0 \text{ boyunca} \to \lim_{y\to 0} \frac{0}{3y^4} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$y = 0 \text{ boyunca} \to \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

← farklı çıkana kadar devam.

$$y = x \text{ boyunca} \to \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + 3x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{4} \neq 0$ limit yoktur.

Eğer sağlayaydı $y = x^2$, $y = x^3$, …'e bakabilirdik.

$$\text{ÖR: } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

$$x = 0 \text{ boyunca} \to \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0 \;/\; y = 0 \text{ boyunca} \to \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^6} = 0$$

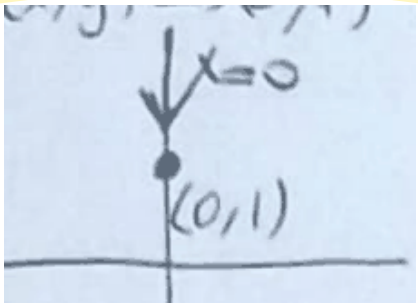
$$y = x \text{ boyunca} \to \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^6 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4 + 1} = 0$$

$$y = x^2 \;/\!/ \to \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^6 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

$$y = x^3 \;/\!/ \to \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$$

limiti yoktur.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x + y - 1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}$$ limit var olm. ispatla.



orijinal çizim, s. 15

$$x = 0 \text{ boyunca} \Rightarrow \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{\sqrt{(y-1)^2}} = \frac{y-1}{|y-1|} \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{y\to 1^+} \dfrac{y-1}{y-1} = 1 \\ \lim\limits_{y\to 1^-} \dfrac{y-1}{-(y-1)} = -1 \end{cases}$$

1 nokt. limit yoktur. (0,1) noktasında limit yoktur.

$$\text{ÖR: } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{ sadeleştirme ile } \frac{0}{0} \text{ dan kurtulma ×}$$

$$\hookrightarrow \text{ Belli yönlerde yaklaşma: } \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ y = x \quad y = x^3 \\ y = x^2 \end{array}$$

Kutupsal dönüşüm:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta = 0 \\ y = r\sin\theta = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r = 0$$

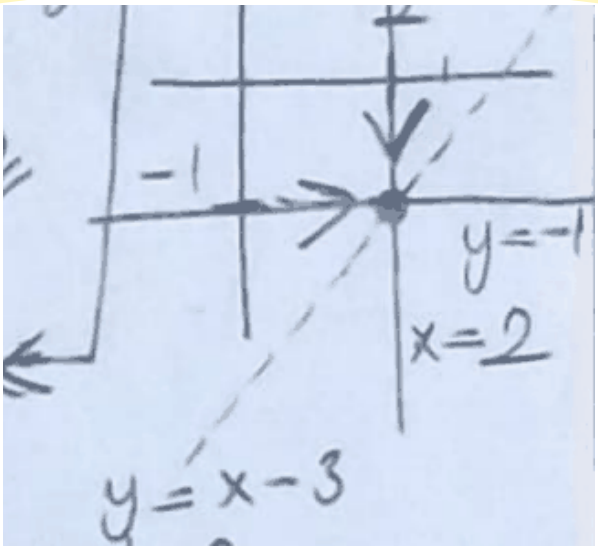
$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{4r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{r^2}} = \lim_{r\to 0} 4r\cos\theta\sin\theta$$

? =0 limit sonucu var ve 0'dır.

$$\text{ÖR: } \lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{5\cdot(x-2)^3\cdot(y+1)}{(x-2)^6 + 2(y+1)^2} = \frac{0}{0}$$

× Çarpanlara ayırma × Belli yönlerde yaklaşma Kutupsal dönüşüm ✓



orijinal çizim, s. 15

$y = -1$ boyunca: $\lim_{x\to 2} \frac{0}{(x-2)^6} = 0$

$x = 2$ boyunca: $\lim_{y\to -1} \frac{0}{2(y+1)^2} = \lim_{y\to -1} 0 = 0$

$y = x - 3$ boyunca: $\lim_{x\to 2} \frac{5(x-2)^4}{(x-2)^6 + 2(x-2)^2}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{5(x-2)^2}{(x-2)^4 + 2} = \frac{0}{2} = 0$$

Kutupsal Dönüşüm:

$(x, y) \to (0,0)$ $\quad r\cos\theta = x$ $\quad x - 2 = r\cos\theta$

$x \to 2$ $\quad r\sin\theta = y$ $\quad y + 1 = r\sin\theta$!

$y \to -1$ $\quad r\cos\theta = 0$

$r\sin\theta = 0 \to \underline{\underline{r = 0}}$

$$\lim_{r\to 0} \frac{5\cdot r^3\cos^3\theta\cdot r\sin\theta}{r^6\cos^6\theta + 2r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{5r^2\cos^3\theta\sin\theta}{r^4\cos^6\theta + 2\sin^2\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{5r^2\cos^3\theta\cdot\sin\theta}{r^4\cos^6\theta + 2\sin^2\theta} = \frac{0}{2\sin^2\theta} = 0$$

$\sin\theta \neq 0$ iken sonuç 0'dır.
Eğer $\sin\theta = 0$ olursa $\frac{0}{0}$ belirsizliği devam eder. Bu da bize bu limitin olmadığını gösterir.

orj. s. 16

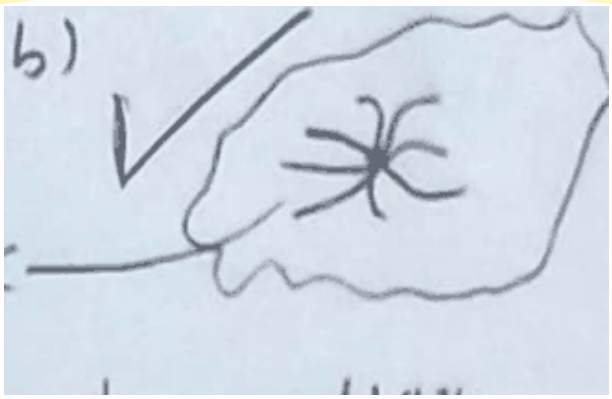
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Süreklilik

$f(x, y)$'nin (a, b) nokt. da sürekli olabilmesi için:

(1) $f(a, b)$ tanımlı olmalı [(a, b) nokt. $f(x, y)$'nin tanım kümesinde olmalıdır]
(2) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ var olmalı.

(3) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Her yönde sürekli olmalı



orijinal çizim, s. 16

→ Parçalı olmayan fonksiyonlarda süreklilik

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \rightarrow$ sürekli old. en geniş küme $\mathbb{R}^2$

$f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x+y} \rightarrow$ sürekli old. en geniş küme

$x + y = 0 \rightarrow \underline{x = -y} \qquad \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \mid x = -y,\ x,y \in \mathbb{R}\}$

$f(x,y) = \sqrt{x-y+2} \rightarrow$ sürekli old. en geniş küme

$x - y + 2 \geq 0 \qquad x - y + 2$

$\mathbb{R}^2 - \{(x,y) \mid x - y + 2 < 0,\ x,y \in \mathbb{R}\}$

→ Parçalı fonksiyonlarda süreklilik

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & (x,y) \neq (1,-2) \text{ iken} \\ k, & (x,y) = (1,-2) \text{ iken} \end{cases}$$

her (x,y) için sürekli ise k kaçtır?

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \overset{(x^2+y^2)}{f(x,y)} = f(1,-2) \qquad \Longrightarrow \quad 1+4 = k \quad 5 = k$$

$$1^2 + (-2)^2 \qquad = \qquad k$$

ÖR: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \underset{0}{x^2} + \underset{0}{y^2} = 0$

sürekli old. en geniş aralık ?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underset{\frac{0}{0}}{\dfrac{xy}{x^2+y^2}} \overset{?}{=} \underset{0}{f(0,0)} \Longrightarrow (0,0) \text{ noktası süreksizdir.}$$

$$x = 0 \text{ boyunca}: \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

$$y = 0 \text{ boyunca}: \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$y = x \text{ boyunca}: \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} \neq 0$ limit yoktur.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y - x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{olar. veriliyor.}$$

Buna göre, $f(x,y)$ fonks. $(0,0)$ nokt. da sürekli mi?

x'e göre kısmi türev

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(4xy - 3x^2)\cdot(x^2+y^2) - (2x^2y - x^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy^3 - x^4 - 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \underbrace{f_x(0,0)}_{0}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x\cdot y^3 - x^4 - 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \begin{array}{l} \nearrow\ x = 0: \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0 \\ \rightarrow\ y = 0: \lim_{x\to 0} \frac{-x^4}{x^4} = -1 \\ \searrow \end{array}$$

$0 \neq -1$
limit yoktur.
Sürekli değildir.

İlk başta x'e göre kısmi türev alınıp daha sonra sürekliliğine bakılır

orj. s. 17

Kısmi Türev

$f(x,y)$ veya $f(x,y,z)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2)} = f_x(1,2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} = f_y(1,0)$$

ÖRN: $f(x,y) = x^2y^3 - 5xy^2 + x^3 - 2y + 1$

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = ? \Rightarrow 2xy^3 - 5y^2 + 3x^2$

b) $\frac{\partial f}{\partial y} = ? \Rightarrow 3x^2y^2 - 10xy - 2$

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 2y^3 + 6x$

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = 6x^2y - 10x$

e) $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = f_{xy} = 6xy^2 - 10y$

$$f_{xy} = f_{yx}$$
$$\uparrow$$

önce x, daha sonra y'ye göre türev alınır

ÖRN: $f(x,y,z) = xyz + e^{x^2} + \cos(xy) - \ln z$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = f_{zyx} = 1$$

Kısmi Türevde Limit Tanım Kuralları

$$f(x,y) \begin{cases} \rightarrow & f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \\ \searrow & f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \end{cases}$$

ÖRN: $f(x,y) = x^2 + y^2$

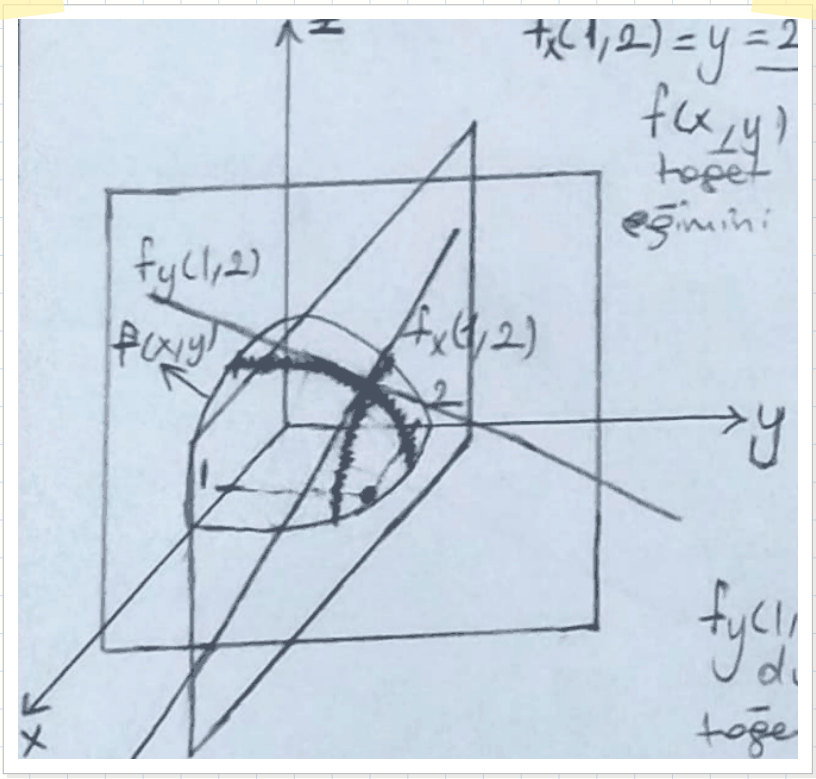
a) f_x limit tanım kuralına göre bulunuz.
b) f_y // // // // //

$$\text{a) } \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + y^2 - x^2 - y^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$$

$$\text{b) } \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + (y+h)^2 - x^2 - y^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2yh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2y + h) = 2y$$

$$f(x,y,z) \rightarrow f_x = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h}$$
$$\hookrightarrow f_y = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h,z) - f(x,y,z)}{h}$$
$$\hookrightarrow f_z = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y,z+h) - f(x,y,z)}{h}$$

Kısmi Türevin Geometrik Yorumu



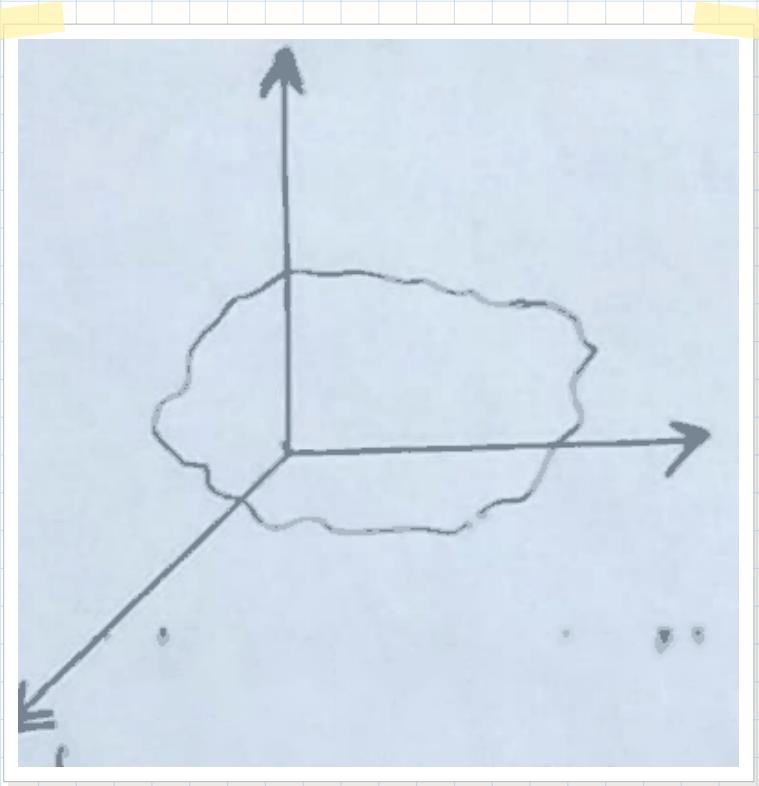
orijinal çizim, s. 17

$f_x(1,2)$ = $y = 2$ düzleminde $f(x,y)$ fonks. teğet doğrunun eğimini bulunuz.
$f_y(1,2)$ = $x = 1$ düzleminde teğet doğ. eğim. bul.

$$f_x(1,2) = f(x,2)$$
$$f'_2(1) = f_x(1,2) \text{ eğim}$$
$$f_y(1,2) = \ldots \text{ eğim}$$

Toplam Diferansiyel

$z = f(x,y)$ girdiler x ve y ?denir. Çıktı z olu?r



orijinal çizim, s. 17

$$\Delta z = f_x \cdot \Delta x + f_y \cdot \Delta y$$
$$\Rightarrow\ dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

Toplam diferansiyel

$f(x, y) = z$ $\quad (1,3) \to (1{,}1,\ 3) \to$ x'teki 0,1'lik değişimi bulmak için toplam diferansiyel uygulanır

$$dz = f_x(1,3) \cdot dx + f_y(1,3) \cdot dy$$
$$\Rightarrow\ dz = \underset{0{,}1}{5dx} - \underset{0}{3dy} = \underline{\underline{0{,}5}}$$

ÖRN: $f(x, y) = (x^2 + y - 2)^4 + (x - y + 2)^3$ fonks. $(1, -2)$ nokt. daki toplam türevi df'i bulunuz.

$$df = f_x(1,-2) \cdot dx + f_y(1,-2) \cdot dy$$
$$f_x(x, y) = 4(x^2 + y - 2)^3 \cdot 2x + 3(x - y + 2)^2 \cdot 1$$
$$f_x(1,-2) = -141 \qquad f_y(x, y) = 4(x^2 + y - 2)^3 \cdot 1 + 3(x - y + 2)^2 \cdot (-1)$$
$$f_y(1,-2) = -183 \qquad df(1,-2) = \underline{-141 \cdot dx - 183\, dy}$$

ÖRN: $x = r \sin\theta \cos\varphi$ bağımlı değ. x olac. biçimde toplam d.f. nedir?

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot d\theta + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot d\varphi$$
$$\Rightarrow\ dx = (\sin\theta \cos\varphi)\, dr + (r \cos\theta \cos\varphi)\, d\theta - r \sin\theta \sin\varphi)\, d\varphi$$

orj. s. 18

Kısmi Türevde Zincir Kuralı

$f(x,y)$ veya $f(x,y,z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \text{ veya } \frac{\partial f}{\partial y} = f_y \ \dots$$

ÖRN: $f(x,y) = x^2y - y^2 + x \cdot y^3 - 2x + 1$

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^3 - 2$ b) $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2y + 3xy^2$

$f(x,y)$ başka değişkenlere bağlı olarak yazılırsa zincir kuralı uygulanır.

$$x = u + 2v \qquad y = 3uv \ \cdots \Rightarrow \ \frac{\partial f}{\partial u}$$

ÖRN: $f(x,y) = x^2y^3 + 3xy - 2x + 1$

$x = 2u + 3v$ $y = u^2 \cdot v$

a) $\frac{\partial f}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$

$= (2xy^3 + 3y - 2) \cdot 2 + (3x^2y^2 + 3x) \cdot 2uv$

b) $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=2}} = ?$ $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} =$

$= (2xy^3 + 3y - 2) \cdot 3 + (3x^2y^2 + 3x) \cdot u^2$

$= 396 + 400 = 796$ [8]

ÖRN: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$

$x = p^2 + r^2$
$y = pr$
$z = 2p - 3r$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = ?$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} =$$

$$= 2x \cdot 2r + 2y \cdot p + 2z \cdot (-3) = 4xr + 2yp - 6z$$

ÖRN: $F = F(x-y,\ y-z,\ z-x)$ fonks. da $u = x-y,\ v = y-z,\ w = z-x$ dönüşümleri yapılırsa $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$ toplamı ne olur?

$F = F(u,v,w)$

$u = x - y$

$v = y - z$ $w = z - x$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ = F_u \cdot 1 + F_v \cdot 0 - F_w = F_u - F_w \end{cases}$$

[8] Claude notu: $(3x^2y^2 + 3x)u^2 = 792$ olduğundan muhtemelen $396 + 792 = 1188$ olmalı.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$
$$= F_u\cdot(-1) + F_v\cdot 1 + F_w\cdot 0 = F_v - F_u$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$= F_u\cdot 0 + F_v\cdot(-1) + F_w\cdot 1 = F_w - F_v \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

ÖRN: $\frac{\partial}{\partial y}\left[f(xy, e^{xy})\right]$ ifadesinin eşiti?

$u = xy \quad v = e^{xy} \Rightarrow f(u,v)$

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot e^{xy}\cdot x$$

Kısmi Türevde Kapalı Fonksiyon Türevi

$x^2y + z^3x + zy = x^2 + y^2 - 1 \rightarrow$ Kapalı fonksiyon türevi;

$\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial y}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial x}{\partial z} = ? \rightarrow$ değişkenler eşitliğin herhangi bir tarafında yalnız kalamaz.

ÖRN: $x^2y + z^3x + zy = x^2 + y^2 - 1$ $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$

$$2xy + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x + z^3\cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot y = 2x$$

y sabit
$z \rightarrow x$'e bağlı fonksiyon
$x \rightarrow x$'e göre türev

ardından $\frac{\partial z}{\partial x}$'i yalnız bırakınca türevi bulunmuş olur.

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(3z^2x + y) = 2x - 2xy - z^3$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - 2xy - z^3}{3z^2x + y}$$

ÖR: $e^{xy} + z^2x = \cos(zx) + \ln x - 2$ ise $\frac{\partial y}{\partial z} = ?$

x = sabit
$y \rightarrow z$'ye bağlı fonks.
z'ye göre türev

$$e^{xy}\cdot x\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + 2zx = -\sin(zx)\cdot x$$
$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{-x\sin(zx) - 2zx}{x\cdot e^{xy}} \leftarrow x\cdot e^{xy}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} = -x\cdot\sin(zx) - 2zx$$

ÖRN: $\begin{aligned} u &= x^3y - y^2 + x \\ v &= 3xy - x^2 \end{aligned}$ denklem sistemi veriliyor.

$x = -1,\ y = 1$ old. noktada $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v$ ve $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v$ ifadelerin değerini bulunuz.

1. adım $\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{aligned}$ alınmalı

2. adım $x = -1,\ y = 1$

$$1 = 3x^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \cdot y + x^3 \cdot \frac{\partial y}{\partial u} - 2y \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$0 = 3 \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \cdot y + 3x \cdot \frac{\partial y}{\partial u} - 2x \cdot \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$1 = 3\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} - 2\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$0 = 3\frac{\partial x}{\partial u} - 3\frac{\partial y}{\partial u} + 2\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 4\frac{\partial x}{\partial u} - 3\frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 &= 5\frac{\partial x}{\partial u} - 3\frac{\partial y}{\partial u} \end{aligned}\right]$$

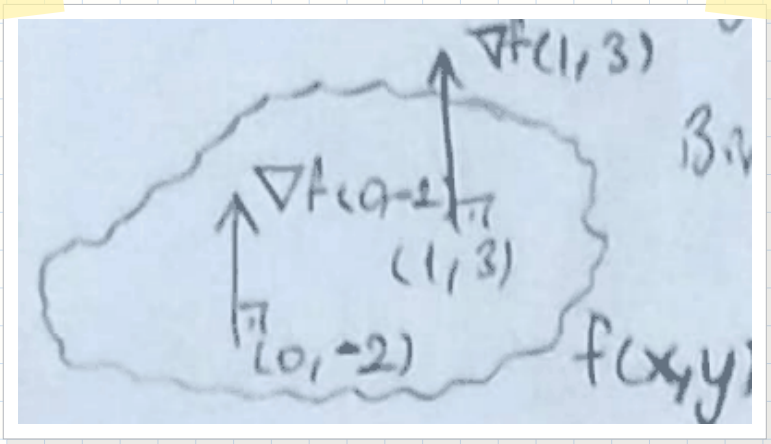
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v = \frac{5}{3} \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v = -1$$ [9]

orj. s. 19

Gradyan Vektörü

$f(x,y)$ veya $f(x,y,z)$ çok değişkenli fonksiyonlardan elde edilen vektöre denir.

$$f(x,y) \to \nabla f = (f_x, f_y) \;/\; f(x,y,z) \to \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$



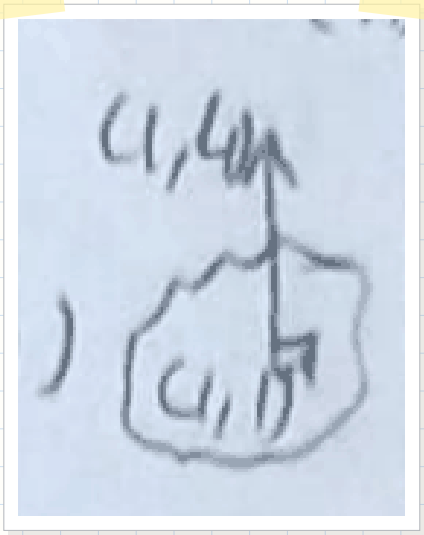
orijinal çizim, s. 19

[9] Claude notu: sayfanın alt kenarında kesik; muhtemelen $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v = -\frac{5}{3}$ ve $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v = -1$ olmalı.

Bir fonksiyona dik bir vektördür.

ÖRN: $f(x,y) = x^2y + y^3 - x + 1$ ise gradyan vektörü $(\nabla f) = ?$

$$\nabla f = (2xy - 1,\ x^2 + 3y^2) \qquad \nabla f(1,1) = (1,4)$$



orijinal çizim, s. 19

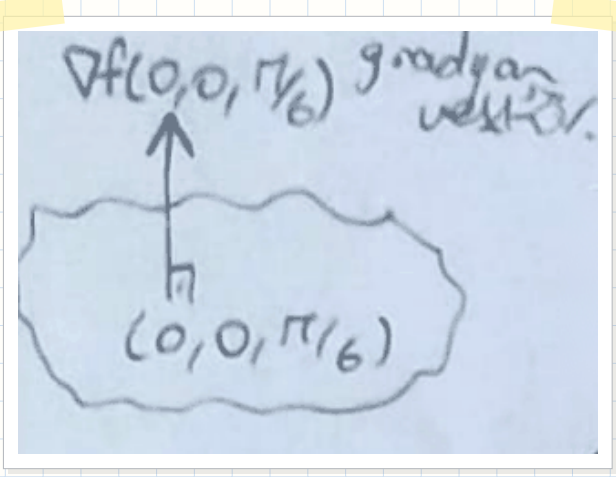
ÖRN: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ ise $\nabla f(1,1,-2) = ?$

$$\nabla f = (2x,2y,2z) \qquad \nabla f(1,1,-2) = (2,2,-4)$$

fonksiyona dik gradyan vektör

ÖRN: $f(x,y,z) = e^{x+y}\cos z + (y+1)\sin^{-1}x \ \rightarrow\ \arcsin x$

fonks. için ∇f'i $\left(0,0,\frac{\pi}{6}\right)$ nokt. da hesaplayınız.



orijinal çizim, s. 19

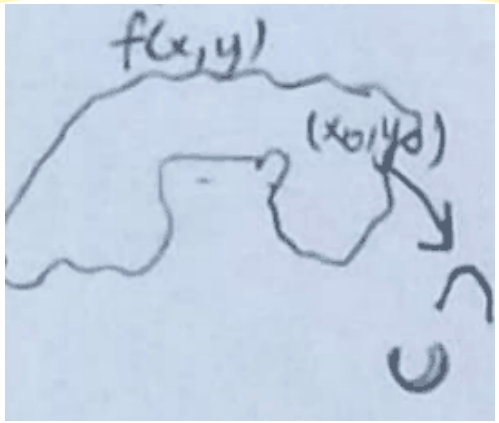
$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$

$$\nabla f = \left(\cos z \cdot e^{x+y} \cdot 1 + (y+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\right.$$
$$\left. e^{x+y} \cdot 1 \cdot \cos z + \sin^{-1} x,\ -e^{x+y} \cdot \sin z\right)$$

$$\nabla f(0,0,\pi/6) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + 1,\ 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + 0,\ 1 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

Yönlü Türev

$f(x,y)$ veya $f(x,y,z) \rightarrow$ Bir fonksiyonun bir yön boyunca (vektör) türevini alıca? z. Böylece fonksiyonun o noktada "∪" veya "∩" olup olmadığını anlayacağız.



orijinal çizim, s. 19

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \qquad \text{(dot product)'ı yapım}$$

ÖRN: $f(x,y) = x^2y + y^3 + xy - 2$ fonks. nun $A(1,-2)$ nokt. da $\vec{u} = (1,3)$ vektörü boyunca yönlü türevi= ?

$$D_{\vec{u}} f(1,-2) = \nabla f(1,-2) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (2xy + y,\ x^2 + 3y^2 + x) \qquad \nabla f(1,-2) = (-6,14)$$

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(1,3)}{\sqrt{1+9}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$D_{\vec{u}} f(1,-2) = (-6,14) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$
$$= -\frac{6}{\sqrt{10}} + \frac{42}{\sqrt{10}} = \frac{36}{\sqrt{10}}$$

ÖRN: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ fonks. nun $A(1,2,-1)$ nokt. da $B(2,1,-2)$ nokt. a doğru yönlü türevi= ?

$$A \longrightarrow B \qquad \overrightarrow{AB} = (1,-1,-1) \qquad \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(1,-1,-1)}{\sqrt{3}}$$

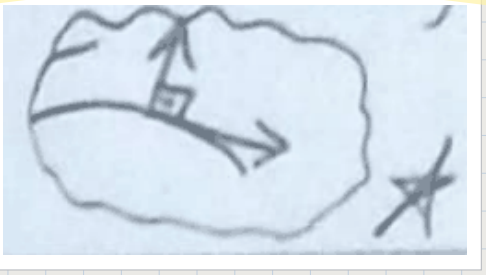
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (2x, 2y, 2z)$$

$$\nabla f(1,2,-1) = (2,4,-2)$$

$$D_{\overrightarrow{AB}} f(1,2,-1) = (2,4,-2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \underline{0}$$



orijinal çizim, s. 19

Maksimum ve Minimum Yönlü Türev

* Yönlü türev max değerini yön vektörünün ∇f olması durumunda gerçekleştirir.
* Yönlü türev min değerini yön vektörünün $-\nabla f$ olması durumunda gerçekleştirir.

ÖRN: $f(x,y) = x^2y + xy - 1$ fonks. nun $A(1,-3)$ nokt. daki max ve min yönlü türev değer[?i]

$$\underline{\max} \quad \vec{u} = \nabla f \qquad \nabla f = (f_x, f_y) = (2xy + y,\ x^2 + x)$$

$$D = \nabla f \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \qquad \nabla f(1,-3) = (-9,2) \qquad \sqrt{85}$$

$$\max \Rightarrow D = (-9,2) \cdot \frac{(-9,2)}{\sqrt{81+4}} = \frac{81}{\sqrt{85}} + \frac{4}{\sqrt{85}} = \frac{85}{\sqrt{85}} \uparrow$$

$$\text{max yönlü türev} \rightarrow |\nabla f| = \sqrt{81+4} = \sqrt{85}$$

$$\text{min yönlü türev} \rightarrow -|\nabla f| = -\sqrt{85}$$

ÖRN: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ fonks. $(-1,1,2)$ nokt. max ve min yönlü türevi= ?

$$\max = |\nabla f| \qquad \min = -|\nabla f| \qquad \nabla f = (2x, 2y, 2z)$$

$$\nabla f(-1,1,2) = (-2,2,4) \qquad \max = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24}$$

$$\min = -\sqrt{24}$$

ÖRN: $f(x,y,z) = x^2y + x\sqrt{1+z}$ fonks. (1,2,3) nokt. daki $\vec{v} = (2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k})$ vekt. yönündeki yönlü türevi= ?

$$D_{\vec{v}}f(1,2,3) = \nabla f(1,2,3) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = \left(2xy + \sqrt{1+z},\ x^2,\ x \cdot \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+z}\right)^{-1} \cdot 1\right)$$

$$\nabla f(1,2,3) = \left(6,1,\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(2,1,-2)}{\sqrt{4+1+4}} = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

$$D_{\vec{v}}f = \left(6,1,\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) = 4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$$

ÖRN: $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\sin y$ fonks. nun $P(1,0)$ nokt. da:
a) en hızlı arttığı ve en hızlı azaldığı yönleri bulunuz.
b) en hızlı arttığı ve en hızlı azaldığı yön. deki doğrultu türevlerini hesaplayınız.

orj. s. 20

a) $\nabla f(1,0) \rightarrow$ en hızlı arttığı yön $= (0,2)$
$\nabla f(1,0) \rightarrow$ en hızlı azaldığı yön $= (0,-2)$

$$\nabla f = (f_x, f_y) = \Big(2xy + \sin y \cdot e^{xy} \cdot y,\ x^2 + e^{xy} \cdot x \cdot \sin y + e^{xy} \cdot \cos y\Big)$$

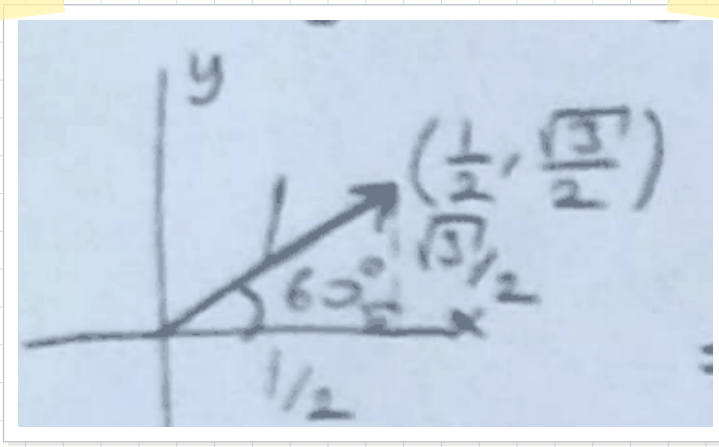
$$\nabla f(1,0) = (0,1+1) = (0,2)$$

b) $|\nabla f(1,0)|$ = en hızlı arttığı yöndeki doğrultu türevi $= \sqrt{0^2+2^2} = 2$
$-|\nabla f(1,0)|$ = en hızlı azaldığı yöndeki doğrultu türevi $= -2$

ÖRN: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy$ fonks. nun $A(1,3)$ nokt. da x ekseni ile pozitif yönde $60°$ açı yapan vektör boyunca doğrultu türevini hesaplayınız.

$$\nabla f(1,3) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \text{doğrultu türevi}$$

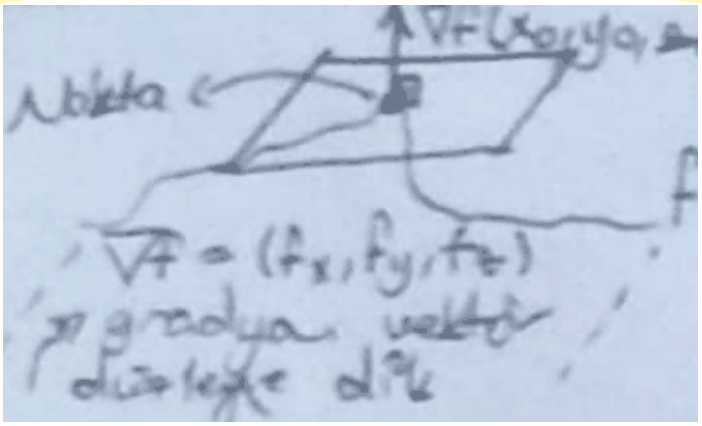
$$\nabla f = (f_x, f_y) = (2x - 3y,\ 2y - 3x) \qquad \nabla f(1,3) = (-7,3)$$



orijinal çizim, s. 20

$$(-7,3)\cdot\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=-\frac{7}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

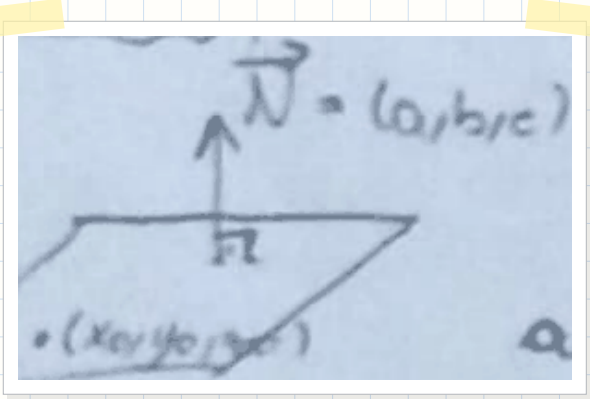
Bir Yüzeye Teğet Düzlem Denklemini Bulma (Tangent Plane)



orijinal çizim, s. 20

$f(x,y)$ ve $f(x,y,z)$ birer yüzey. Teğet nokta → hem düzlem üzerinde hem de yüzey üzerindedir.
$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ gradyan vektör düzleme dik

→ **Düzlem denklemi yazma**

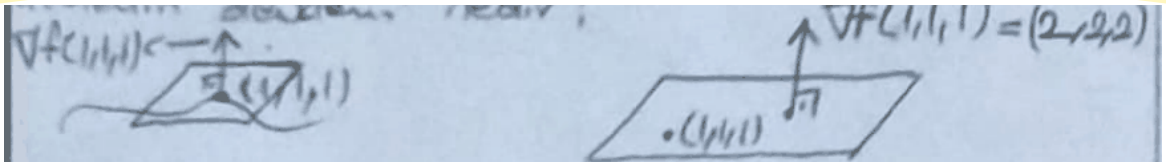


orijinal çizim, s. 20

* Düzleme dik vektör
* Düzlemin üzerinde bir nokta.

$$\vec{N}=(a,b,c) \qquad a(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)=0$$

ÖRN: $x^2+y^2+z^2=3$ yüzeyine (1,1,1) nokt. a çizilen teğet düzlemin denklemi nedir?

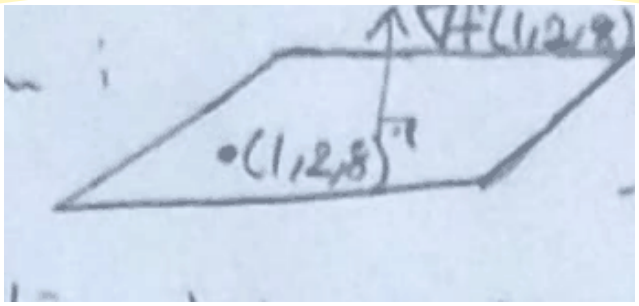


orijinal çizim, s. 20

1. adım $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$
2. adım $\nabla f = (2x,2y,2z)$ $\nabla f(1,1,1) = (2,2,2)$
3. adım $2(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0$
$2x + 2y + 2z - 6 = 0$ teğet düzlem denklemi

ÖRN: $f(x,y) = x^2 + y^3 - 1$ yüzeyine (1,2) noktasında çizilen teğet düzlem denklemi nedir?

1. adım: $z = x^2 + y^3 - 1$ $0 = x^2 + y^3 - z - 1$
$f(x,y,z) = x^2 + y^3 - z - 1$
2. adım: $z = 1 + 8 - 1$ $z = 8$ $(1,2,8)$

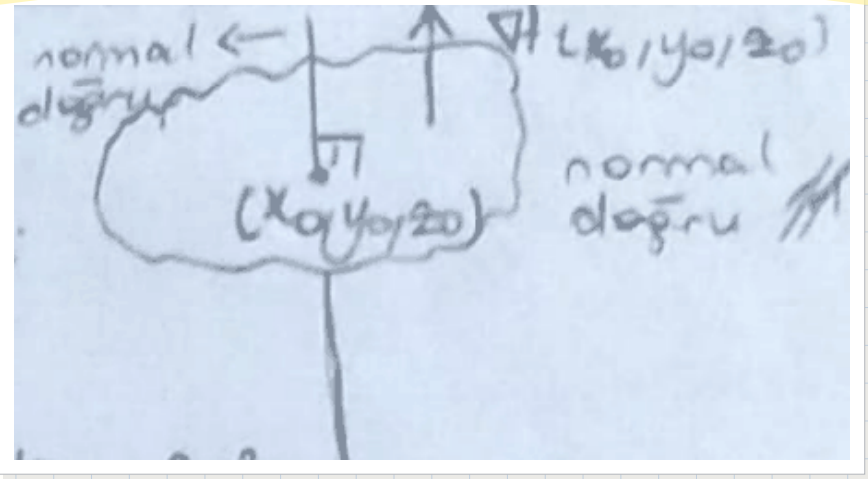


orijinal çizim, s. 20

3. adım: $\nabla f = (2x, 3y^2, -1)$
$\nabla f(1,2,8) = (2,12,-1)$
teğet düz. denk. → $2(x-1) + 12(y-2) - 1\cdot(z-8) = 0$
$2x + 12y - z - 18 = 0$

Bir Yüzeye Normal Doğru Denklemini Bulma

$f(x,y)$ ve $f(x,y,z)$ normal doğru

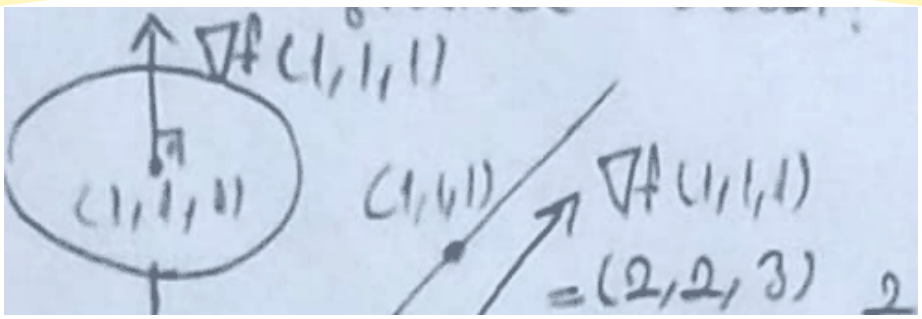


orijinal çizim, s. 20

Uzayda doğru denk.: (x_0, y_0, z_0) $\vec{v} = (a, b, c)$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t$$

ÖRN: $x^2 + y^2 + z^3 = 3$ yüzeyine (1,1,1) nokt. dan çizilen normal doğrunun denk.?



orijinal çizim, s. 20

1. adım: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 - 3$

2. adım: $\nabla f(1,1,1) = ?$ $\nabla f = (2x, 2y, 3z^2)$ $\nabla f(1,1,1) = (2,2,3)$

3. adım: $t = \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

$x = 2t + 1$ $y = 2t + 1$ $z = 3t + 1$

ÖRN: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ yüzeyine (1,3) nokt. dan çizilen normal doğrunun denklemi= ?

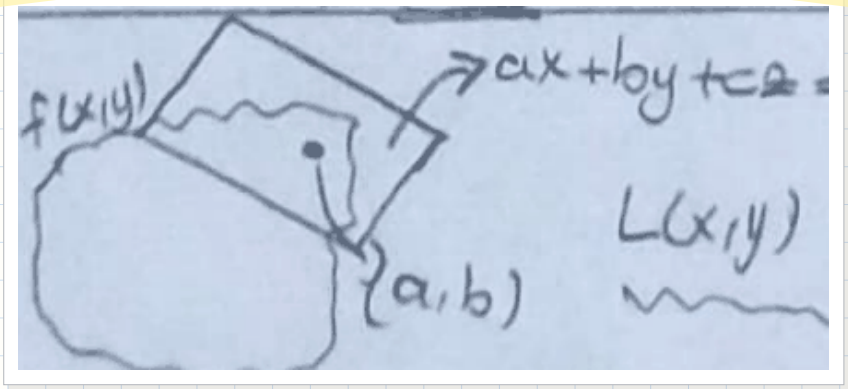
1. adım: $z = x^2 + y^2 - 1$ $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z - 1$

2. // : $z = 1 + 9 - 1$ $z = 9$ $(1,3,9)$

3. // : $\nabla f(1,3,9) = (2x, 2y, -1) = (2,6,-1)$

4. // : normal doğru $\rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-9}{-1} = t$

Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Lineer Yaklaşım Fonksiyonu Bulma



orijinal çizim, s. 20

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)\cdot x + f_y(a,b)\cdot y$$ [10]

ÖRN: $f(x,y) = x^2 - 2x^3 + y^2 + 1$ fonks. nun $(-2,1)$ nokt. da $L(x,y)$ lineerizasyon fonksiyonunu bulunuz.

$$L(x,y) = f(-2,1) + f_x(-2,1)\cdot x + f_y(-2,1)\cdot y$$

$$f(-2,1) = 4 + 24 + 1 + 1 = 30$$ [11]

$$f_x(x,y) = 2x - 6x^2 \Rightarrow f_x(-2,1) = -4 - 24 = -28$$

$$f_y(x,y) = 2y \Rightarrow f_y(-2,1) = 2$$

$$L(x,y) = 30 - 28x + 2y \Rightarrow L(x,y) = -28x + 2y + 30$$

[10] Claude notu: muhtemelen $L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$ olmalı.
[11] Claude notu: $f(x,y) = x^2 - 2x^3 + y^2 + 1$ için muhtemelen $f(-2,1) = 4 + 16 + 1 + 1 = 22$ olmalı.