Matematik II

Çok değişkenli fonksiyonlar, çok katlı integraller (s. 21–32)

Orijinal not: MAT-2.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 21

TAYLOR DİFERANSİYEL YAKLAŞIMI İLE YAKLAŞIK DEĞER HESAPLAMA

$f(x,y) = x^3 + y^4 + 1 \longrightarrow (1,2)$ noktasında teğet düzlem denklemi

$$f(1,2) = 1 + 16 + 1 = 18$$

$f(1{,}003,\ 2{,}001) = ?$ $\quad (1{,}003)^3 + (2{,}001)^4 + 1$ işlem zorluğu

$$f(a + \Delta x,\ b + \Delta y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)\cdot\Delta x + f_y(a,b)\cdot\Delta y$$

$$a = 1 \quad b = 2 \quad \Delta x = 0{,}003 \quad \Delta y = 0{,}001$$

$$f(1+\Delta x,\ 2+\Delta y) \approx f(1,2) + f_x(1,2)\,\Delta x + f_y(1,2)\,\Delta y \qquad f_x = 3x^2 \quad f_y = 4y^3$$
$$\approx 18 + 3\cdot 0{,}003 + 32\cdot 0{,}001$$
$$= 18 + 0{,}009 + 0{,}032 = \underline{18{,}041}$$

Örnek

Diferansiyel yakl. kullan. $\sqrt{(2{,}06)^2 + 5\cdot(0{,}97)^4}$ değerini yaklaşık olarak hesapla.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + 5y^4} \longrightarrow f(2{,}06,\ 0{,}97) = ?$$
$$a = 2 \quad b = 1 \quad \Delta x = 0{,}06 \quad \Delta y = -0{,}03 \qquad (2 + 0{,}06,\ 1 - 0{,}03)$$
$$f(2,1) = 3$$
$$f_x = \tfrac{1}{2}(x^2 + 5y^4)^{-1/2}\cdot 2x \qquad f_x(2,1) = \tfrac{2}{3}$$
$$f_y = \tfrac{1}{2}(x^2 + 5y^4)^{-1/2}\cdot 20y^3 \qquad f_y(2,1) = \tfrac{10}{3}$$
$$f(2{,}06,\ 0{,}97) = 3 + \tfrac{2}{3}\cdot 0{,}06 + \left(\tfrac{10}{3}\cdot(-0{,}03)\right)$$
$$= 3 + 0{,}04 - 0{,}1 = \underline{2{,}94}$$

İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA YEREL MAKSİMUM VE YEREL MİNİMUM, EYER NOKTALARINI BULMA

$f_x = 0 \quad f_y = 0 \longrightarrow$? ikisinin çözümünü sağlayan (x, y) ikililerine kritik noktalar ? denir. Kritik noktalar yerel max, min, eyer noktası adaydır.

Sınıflama Metodu: $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 \quad (x_0, y_0)$'da

1) $D(x_0, y_0) > 0$, $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ise (x_0, y_0) yerel min.
2) $D(x_0, y_0) > 0$, $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ise (x_0, y_0) yerel max.
3) $D(x_0, y_0) < 0$ ise eyer noktası.
4) $D(x_0, y_0) = 0$ ise başka tekniklere başvurulmalıdır.

Örnek

$f(x, y) = x^2 + 2xy$ fonks. nun yerel max, min ve eyer noktasını bulunuz.

1. adım: $\nabla f = 0$

$$f_x = 0 \longrightarrow 2x + 2y = 0 \quad \boxed{y = 0}$$
$$f_y = 0 \longrightarrow 2x = 0 \quad \boxed{x = 0}$$

$(0,0)$ kritik nokta

2. adım: $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 \qquad f_{xx} = 2 \quad f_{yy} = 0 \quad f_{xy} = 2$

$$D = 2 \cdot 0 - 4 = -4$$

3. adım: $D(0,0) = -4 < 0 \longrightarrow$ eyer noktası $\longrightarrow (0,0)$

Örnek

$f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4$ fonks. yerel min, max, eyer noktasını bul.

1. $\nabla f = 0 \qquad f_x = 0 : \; 2y - 10x + 4 = 0 \qquad f_y = 0 : \; 2x - 4y = 0$

$$x = 2y \qquad 2y - 20y + 4 = 0 \qquad y = \tfrac{2}{9},\; x = \tfrac{4}{9}$$

$$D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 \qquad f_{xx} = -10 \quad f_{yy} = -4 \quad f_{xy} = 2$$

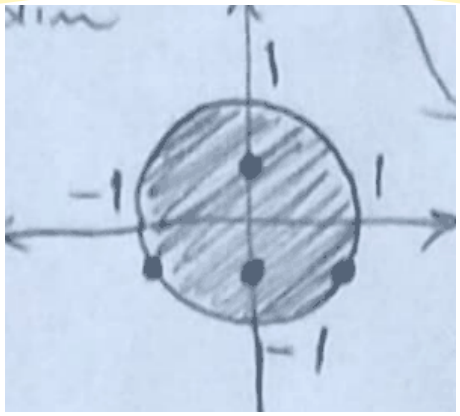
$$D = 40 - 4 = 36 \qquad D\left(\tfrac{4}{9}, \tfrac{2}{9}\right) = 36 > 0$$

$$f_{xx}\left(\tfrac{4}{9}, \tfrac{2}{9}\right) = -10 < 0 \qquad \left(\tfrac{4}{9}, \tfrac{2}{9}\right) \longrightarrow \text{yerel max.}$$

Örnek

$f(x, y) = 2y^3 + 2x^2y - x^2 - y$ fonks. nun $D = \{(x, y);\; x^2 + y^2 \leq 1\}$ kapalı bölgesindeki alabileceği mutlak max ve min değerlerini bulunuz.

1. adım: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad M = (0,0) \quad r = 1$



orijinal çizim, s. 21

2. adım: Köşe koordinatları yoktur.

3. adım: $\nabla f = 0 \quad f_x = 0 \quad f_y = 0$

$$f_x = 4xy - 2x = 0 \Longrightarrow 2x(2y-1) = 0 \qquad x = 0,\ y = \tfrac{1}{2}$$
$$f_y = 6y^2 + 2x^2 - 1 = 0 \longrightarrow 6y^2 - 1 = 0 \qquad y = \pm\tfrac{1}{\sqrt{6}}$$
$$y = \tfrac{1}{2} \Longrightarrow \tfrac{3}{2} + 2x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow 2x^2 = -\tfrac{1}{2} \qquad x^2 = -\tfrac{1}{4}\ (\times)$$
$$\left(0, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right) \vee \left(0, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right) \longrightarrow$$

4. adım: $x^2 + y^2 = 1$

$$f(x,y) = 2y^3 + 2x^2y - x^2 - y \longleftarrow x^2 = 1 - y^2$$

$$x^2 = 1 - y^2 \Longrightarrow f(y) = 2y^3 + 2(1-y^2)y - (1-y^2) - y$$
$$= y^2 + y - 1 \qquad f'(y) = 2y + 1 = 0 \qquad y = -\tfrac{1}{2}$$
$$x^2 = \tfrac{3}{4} \longrightarrow x = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad x = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \text{ ve } \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)$$

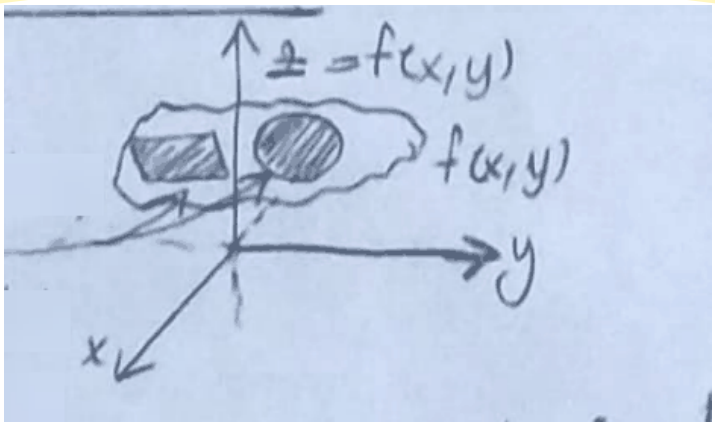
5. adım:

$$f\left(0, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = 2 \cdot \tfrac{1}{6\sqrt{6}} - \tfrac{1}{\sqrt{6}} = -\tfrac{2}{3\sqrt{6}}$$
$$f\left(0, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = 2 \cdot \tfrac{-1}{6\sqrt{6}} + \tfrac{1}{\sqrt{6}} = \tfrac{2}{3\sqrt{6}}$$
$$f\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot \tfrac{-1}{8} + 2 \cdot \tfrac{3}{4}\left(-\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{5}{4}$$
$$f\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot \tfrac{-1}{8} + 2 \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{5}{4}$$

Mutlak max $\longrightarrow \tfrac{2}{3\sqrt{6}}$ mutlak min $\longrightarrow -\tfrac{5}{4}$

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA KAPALI BİR BÖLGE İÇİN MUTLAK MAKSİMUM VE MİNİMUM BULMA

$f(x,y) = \ldots$



orijinal çizim, s. 21

Girdileri sınırlanmış bir bölgede $f(x,y)$'nin mutlak max/min aranır.

1. adım: Bizi sınırlayan bölgeyi çizmeli ve tüm sınır fonksiyonlarını belirlemeliyiz.

2. adım: Mutlak max ve min adaylarını belirleriz.

2.1 adım: Köşe koordinatları direkt adaylardır.

2.2 adım: $\nabla f = 0 \Longrightarrow f_x = 0,\ f_y = 0 \Longrightarrow$ Kritik noktalardan kapalı bölge içine düşenler adaydır.

2.3 adım: Sınır fonks. da krit. nokt. tespit edilir.

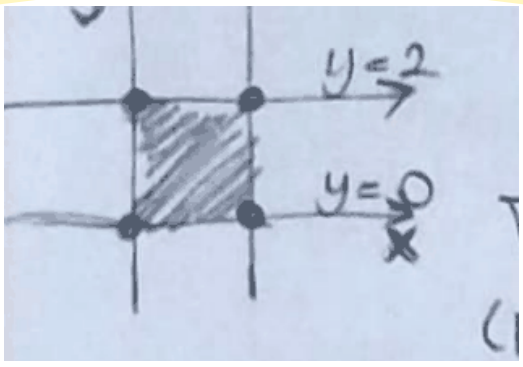
orj. s. 22

3. adım: Bütün adaylar $f(x,y)$'ye konulur. Çıkan sonuçlardan en büyüğü mutlak max, en küçüğü mutlak min dir.

Örnek

$f(x,y) = 2x + 2y - x^2 - y^2$ fonks. nun $x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 2$ doğruları tarafından sınırlanan bölgedeki mutlak max ve min değerleri = ?

1. adım:



orijinal çizim, s. 22

2. adım: Köşe adaydır. $(0,0),\ (2,0),\ (2,2),\ (0,2)$

Kritik noktalar adaydır. ($f(x,y)$'nin)

$$\nabla f = 0 \qquad f_x = 2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 1$$
$$(1,1) \longleftarrow f_y = 2 - 2y = 0 \Longrightarrow y = 1$$

Sınır fonksiyonları: $y = 0 \Longrightarrow f(x) = 2x - x^2$

$$(1,0) \longleftarrow x = 1 \longleftarrow 0 = 2 - 2x = f'(x)$$

$$y = 2 \Longrightarrow f(x) = 2x - x^2 \longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow 2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 1 \quad (1,2)$$
$$x = 0 \Longrightarrow f(y) = 2y - y^2 \Longrightarrow f'(y) = 2 - 2y = 0 \Longrightarrow y = 1 \quad (0,1)$$
$$x = 2 \Longrightarrow f(y) = 2y - y^2 \Longrightarrow f'(y) = 2 - 2y = 0 \Longrightarrow y = 1 \quad (2,1)$$

3. adım: Adaylar $\longrightarrow$ (2,1), (0,1), (1,2), (1,0), (1,1), (0,0), (2,0), (0,2), (2,2)

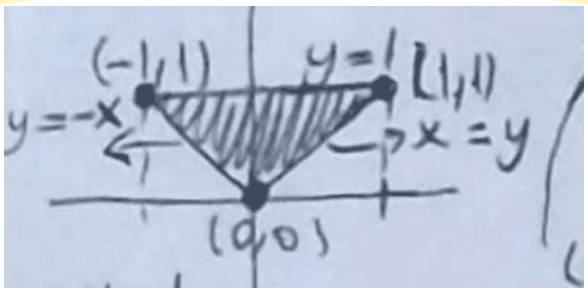
$f(2,1) = 4 + 2 - 4 - 1 = 1$
$f(0,1) = 2 - 1 = 1$
$f(1,0) = 2 - 1 = 1$
$f(2,0) = 0 \quad f(2,2) = 0$

$f(1,1) = 2 + 2 - 1 - 1 = 2$
$f(1,2) = 2 + 4 - 1 - 4 = 1$
$f(0,0) = 0 \quad f(0,2) = 0$
Mutlak max = $2 \Longrightarrow (1,1)$

Mutlak min = $0 \Longrightarrow (0,0),\ (0,2),\ (2,0),\ (2,2)$

Örnek

$f(x,y) = x^2 - y^2$ fonk. veriliyor. Köşe koor. (0,0), (−1,1), (1,1) olan üçgen üzerindeki $f(x,y)$'nin max ve min değerleri = ?



orijinal çizim, s. 22

$$f(0,0) = 0 \qquad f(1,1) = 0 \qquad f(-1,1) = 0$$

Köşe koordinatları

$$\nabla f = 0 \Longrightarrow f_x = 2x = 0 \longrightarrow x = 0$$
$$(0,0) \longleftarrow f_y = -2y = 0 \longrightarrow y = 0$$

$$f(0,1) = -1$$

$$f(x,1) = x^2 - 1 \longrightarrow f'(x) = 0 \longrightarrow f'(x) = 2x = 0 \qquad x = 0 \quad \boxed{(0,1)}$$

$$x = y \longrightarrow f(x) = 0 \longrightarrow f'(x) = 0$$
$$x = -y \longrightarrow f(x) = 0 \longrightarrow f'(x) = 0$$

Köşe koordinatlarında buradaki ile aynı ?sonuca sahip olan vardır.

Max değer: $0 \longrightarrow (0,0),\ (-1,1),\ (1,1)$ min değer: $-1 \longrightarrow (0,1)$

LAGRANGE ÇARPANI METODU

$f(x,y)$ veya $f(x,y,z)$ gibi çok değ. fonks. maks veya min bulma metodudur. Bu fonksiyonları sınırlayan bir denklem üzerinde,

* $f(x,y) = x^2 + 2xy$ nin $x - 3y = 10$ denkl. sağl. nokt. max, min.
* $f(x,y,z) = xyz$ nin $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ " " " max, min.

1. adım: Bizi sınırlayan denklemi $g(x,y)$ veya $g(x,y,z)$ fonksiyonuna çevirmeliyiz.

2. adım: $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g \longrightarrow$ lagrange çarpanı

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle \;/\; \langle f_x, f_y, f_z \rangle$$

Bu eşitliği sağlayan durumları çözeriz.

$$\nabla g = \langle g_x, g_y \rangle \qquad \langle f_x, f_y \rangle = \lambda \cdot \langle g_x, g_y \rangle$$
$$f_y = \lambda \cdot g_y \;\cdots \qquad f_x = \lambda \cdot g_x \;\cdots$$

3. adım: Bizi sınırlayan denkleme eşitliği sağl. durumları ?kullanarak max ve min adayı nokt. bulucaz.

4. adım:

$$f(\quad) = \text{en büyük} \longrightarrow \text{max değer}$$
$$f(\quad) = \text{en küçük} \longrightarrow \text{min değer}$$

Örnek

$f(x,y) = 5x - 3y$ fonks. $x^2 + y^2 = 136$ eşitliğini sağlayan nokt. daki max ve min nokta = ?

1. adım $\longrightarrow g(x,y) = x^2 + y^2 = 136$

2. adım $\longrightarrow \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \longrightarrow \langle 5,-3 \rangle = \lambda \cdot \langle 2x, 2y \rangle$

$$5 = 2x\lambda \longrightarrow x = \frac{5}{2\lambda} \qquad -3 = 2\lambda y \longrightarrow y = \frac{-3}{2\lambda}$$

3. adım $\longrightarrow \frac{25}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 136 \qquad \lambda = \pm\frac{1}{4}$

4. adım $\longrightarrow \lambda = \frac{1}{4} \rightarrow (10,-6) \qquad \lambda = -\frac{1}{4} \rightarrow (-10,6)$

$$f(x,y) = 5x - 3y \longrightarrow \underbrace{f(10,-6) = 68}_{\text{max değer}}, \; \underbrace{f(-10,6) = -68}_{\text{min değer}}$$

Örnek

$f(x,y) = 4x^2 + 10y^2$ fonks. $x^2 + y^2 = 4$ denkl. sağlayan nokt. daki max ve min = ?

1. adım: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$

2. adım: $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g \qquad \langle 8x, 20y \rangle = \lambda \cdot \langle 2x, 2y \rangle$

$$8x = 2x\lambda \longrightarrow \underline{x = 0} \quad \cancel{\lambda = 4}$$
$$20y = 2y\lambda \longrightarrow \underline{y = 0} \quad \cancel{\lambda = 10}$$

3. adım:

$$x = 0 \longrightarrow y^2 = 4 \quad y = \pm 2 \longrightarrow (0,2) \text{ ve } (0,-2)$$
$$y = 0 \longrightarrow x^2 = 4 \longrightarrow x = \pm 2 \longrightarrow (2,0) \text{ ve } (-2,0)$$

4. adım: $f(x,y) = 4x^2 + 10y^2$

$f(0,2) = 40$	$f(0,-2) = 40$	max değer = 40
$f(2,0) = 16$	$f(-2,0) = 16$	min değer = 16

Max nokt. $\longrightarrow (0,2),\ (0,-2)$

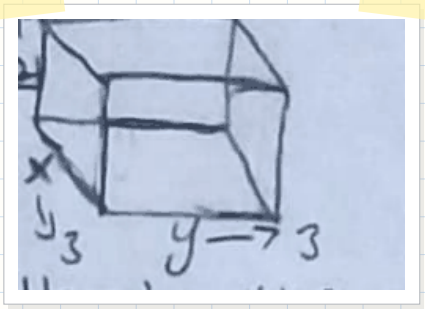
Min " $\longrightarrow (2,0),\ (-2,0)$

Örnek

Yüzey alanı 54 cm^2 olan dik dörtgenler prizması biçimindeki kutunun max hacme sahip olmasını sağlayan kenar uzunluklarını lagrange çarpanı yöntemi ile bul.

$f(x,y,z) \longrightarrow$ maksimum $\quad g(x,y,z) \longrightarrow$ sınırlayan fonksiyon

1. adım



orijinal çizim, s. 22

$$\text{Hacim} = x \cdot y \cdot z$$
$$f(x,y,z) = xyz$$
$$2xy + 2xz + 2yz = 54$$
$$xy + xz + yz = 27$$

Bizi sınırlayan fonks.: $g(x,y,z) = xy + xz + yz - 27$

2. adım

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$$
$$\langle yz, xz, xy \rangle = \lambda \cdot \langle y+z, x+z, x+y \rangle$$
$$yz = \lambda \cdot (y+z) \longrightarrow \lambda = \frac{yz}{y+z}$$
$$xz = \lambda \cdot (x+z) \longrightarrow \lambda = \frac{xz}{x+z}$$
$$xy = \lambda \cdot (x+y) \longrightarrow \lambda = \frac{xy}{x+y}$$

$$\frac{yz}{y+z} = \boxed{\frac{xz}{x+z}} = \frac{xy}{x+y} \qquad (x+z)\cdot yz = (y+z)\cdot xz \qquad z^2(y-x) = 0 \quad z \neq 0$$

$$(x+z)\cdot xy = (x+y)\cdot xz \qquad x \neq 0 \qquad \underline{z = y \qquad y = x}$$

3. adım: $xy + xz + yz = 27 \qquad 3a^2 = 27$

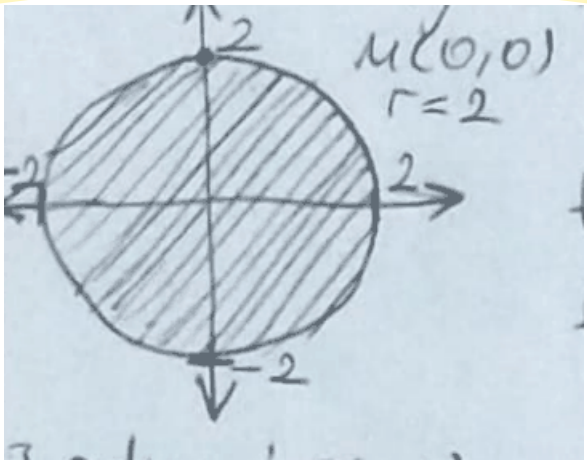
$$\text{max hacim} \longleftarrow 27 = f(3,3,3) \longleftarrow a = 3$$

orj. s. 23

Örnek

$f(x,y) = 4x^2 + 10y^2$ fonks. $x^2 + y^2 \leq 4$ diski üzerindeki max ve min nokt. ve bu nokt. karşılık gelen değerler = ?

1. adım: $x^2 + y^2 = 4 \qquad M(0,0) \quad r = 2$



orijinal çizim, s. 23

2. adım: İç bölgedeki max min aday

$$\nabla f = 0 \qquad \langle f_x, f_y \rangle = 0 \qquad f_x = 0 \quad f_y = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} f_x = 8x = 0 & x = 0 \\ f_y = 20y = 0 & y = 0 \end{array}\right\} (0,0)$$

3. adım: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 \qquad \nabla f = \lambda \cdot \nabla g$

$$\langle 8x, 20y \rangle = \lambda \cdot \langle 2x, 2y \rangle \qquad 8x = \lambda \cdot 2x \qquad 20y = \lambda \cdot 2y$$

$$x = 0 \ \vee \ \lambda = 4$$

1. durum $\longrightarrow x = 0 \longrightarrow y^2 = 4 \quad y = \pm 2 \longrightarrow (0,2)$ ve $(0,-2)$

2. durum $\longrightarrow \lambda = 4 \longrightarrow 20y = 8y \longrightarrow y = 0 \longrightarrow x^2 = 4 \longrightarrow x = \pm 2 \quad (2,0) \ \vee \ (-2,0)$

4. adım:

$$(0,0) \Longrightarrow f(0,0) = \underline{0} \qquad (0,2) \Longrightarrow f(0,2) = \underline{40}$$
$$(2,0) \Longrightarrow f(2,0) = 16 \qquad (0,-2) \Longrightarrow f(0,-2) = 40$$
$$(-2,0) \Longrightarrow f(-2,0) = 16 \qquad \text{max değer} \longrightarrow 40 \longrightarrow (0,2) \vee (0,-2)$$

$$\text{Min değer} \longrightarrow 0 \longrightarrow (0,0)$$

Örnek

$f(x,y,z) = 4y - 2z$ fonks. nun $2x - y - z = 2$ ve $x^2 + y^2 = 1$ şartlarını sağl. nokt. daki en büyük ve en küçük değerlerini bul. $\longrightarrow$ İki tane sınırlayan fonk. var.

$$\left.\begin{array}{l} f \\ g \\ \lambda \end{array}\right\} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \qquad \left.\begin{array}{l} f \\ g \\ h \\ \lambda, \mu \end{array}\right\} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g + \mu \cdot \nabla h$$

1. adım: $g(x,y,z) = 2x - y - z - 2 \qquad h(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$

2. adım: $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g + \mu \cdot \nabla h \qquad x^2 + y^2 = 1 \longrightarrow \frac{4}{\mu^2} + \frac{9}{\mu^2} = 1$

$$\langle 0,4,-2 \rangle = \lambda \cdot \langle 2,-1,-1 \rangle + \mu \cdot \langle 2x, 2y, 0 \rangle \qquad \mu = \pm\sqrt{13}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 2\lambda + 2\mu x \qquad -4 = 2\mu x \longrightarrow x = \tfrac{-2}{\mu} \\ 4 &= -\lambda + 2\mu y \qquad 6 = 2\mu y \longrightarrow y = \tfrac{3}{\mu} \\ -2 &= -\lambda + 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \lambda = 2$$

$$\mu = \sqrt{13} \longrightarrow x = \tfrac{-2}{\sqrt{13}},\ y = \tfrac{3}{\sqrt{13}},\ z = \tfrac{-7}{\sqrt{13}} - 2$$

$$\mu = -\sqrt{13} \longrightarrow x = \tfrac{2}{\sqrt{13}},\ y = \tfrac{-3}{\sqrt{13}},\ z = \tfrac{7}{\sqrt{13}} - 2$$

3. adım: $f(x,y,z) = 4y - 2z$

max nokt. $\left(\tfrac{-2}{\sqrt{13}}, \tfrac{3}{\sqrt{13}}, \left(\tfrac{-7}{\sqrt{13}} - 2\right)\right)$

$f\left(\tfrac{-2}{\sqrt{13}}, \tfrac{3}{\sqrt{13}}, \left(\tfrac{-7}{\sqrt{13}} - 2\right)\right) = \tfrac{26}{\sqrt{13}} + 4$ max değer

min nokt. $\left(\tfrac{2}{\sqrt{13}}, \tfrac{-3}{\sqrt{13}}, \left(\tfrac{7}{\sqrt{13}} - 2\right)\right)$

$f\left(\tfrac{2}{\sqrt{13}}, \tfrac{-3}{\sqrt{13}}, \left(\tfrac{7}{\sqrt{13}} - 2\right)\right) = \tfrac{-26}{\sqrt{13}} + 4$ min değer

Örnek

$f(x,y) = x \cdot y$ fonks. $\tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{2} = 1$ elipsi üzerindeki max ve min noktaları bul.

1. adım: $\tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{2} = 1 \longrightarrow \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{2} - 1 = 0 \longrightarrow g(x,y) = \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{2} - 1$

2. adım: $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g \longrightarrow \langle y, x\rangle = \lambda \cdot \langle \tfrac{x}{2}, y\rangle$

$$y = \lambda \cdot \tfrac{x}{2} \longrightarrow \lambda = \tfrac{2y}{x} \qquad x = \lambda \cdot y \longrightarrow \lambda = \tfrac{x}{y}$$

$$\tfrac{2y}{x} = \tfrac{x}{y} \Longrightarrow x^2 = 2y^2 \Longrightarrow \tfrac{2y^2}{4} + \tfrac{y^2}{2} = 1 \Longrightarrow y^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{2} \longleftarrow x^2 = 2 \longleftarrow y = 1 \qquad y = \pm 1$$

$$x = \pm\sqrt{2} \longleftarrow x^2 = 2 \longleftarrow y = -1$$

$$(\sqrt{2},1),\ (-\sqrt{2},1),\ (\sqrt{2},-1),\ (-\sqrt{2},-1)$$

3. adım: $f(x,y) = x \cdot y \Longrightarrow f(\sqrt{2},1) = \sqrt{2}$

$$f(-\sqrt{2},1) = -\sqrt{2} \qquad f(\sqrt{2},-1) = -\sqrt{2} \qquad f(-\sqrt{2},-1) = \sqrt{2}$$

Max değer $\longrightarrow \sqrt{2} \longrightarrow (\sqrt{2},1)$ ve $(-\sqrt{2},-1)$

Min değer $\longrightarrow -\sqrt{2} \longrightarrow (-\sqrt{2},1)$ ve $(\sqrt{2},-1)$

ÇİFT KATLI İNTEGRAL NEDİR VE NEYİ HESAPLAR?

$$\int f(x)\,dx \longrightarrow \iint f(x,y)\,dx\,dy$$

* üst üste 2 defa integral alma işlemidir.
* 2 farklı değişkene göre integral alınır.

NEYİ HESAPLAR?

1) ALAN HESAPLAMA
   Sabit sayılı fonks. da olur $\longrightarrow \iint 1\,dx\,dy = \text{Alan}$

2) HACİM HESAPLAMA

$\iint f(x,y)\,dx\,dy$ = Hacim Hesapla.

$$\int_2^5\int_1^3 1\,dx\,dy = \text{ALAN} \qquad \int_2^5\int_1^3 (x+2y)\,dx\,dy = \text{HACİM}$$

SINIRLARI VERİLMİŞ Ç.K. İNTEGRALLERİ HESAPLAMA

Örnek

$$\int_2^5 \left(\int_1^3 (x+2y)\,dx \right) dy = ?$$

⟶ integral alma sırası içerden dışa doğru gider.

$$\left(\frac{x^2}{2} + 2xy\right)\Big|_1^3 = \left(\frac{9}{2} + 6y\right) - \left(\frac{1}{2} + 2y\right) = 4 + 4y$$

$$\int_2^5 (4+4y)\,dy = \left(4y + 2y^2\right)\Big|_2^5 = (20+50) - (8+8) = 70 - 16 \quad \text{HACİM} \longleftarrow 54$$

Örnek

$\int_1^3 \int_x^{x^2} xy\,dy\,dx = ?$ ⟶ dıştaki sınır daima sayılardan oluşur.

$$\int_x^{x^2} xy\,dy = \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_x^{x^2} = \frac{x\cdot x^4}{2} - \frac{x\cdot x^2}{2} = \frac{x^5 - x^3}{2}$$

$$\int_1^3 \left(\frac{x^5}{2} - \frac{x^3}{2}\right) dx = \left(\frac{x^6}{12} - \frac{x^4}{8}\right)\Big|_1^3 = \left(\frac{3^6}{12} + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{3^4}{8} + \frac{1}{12}\right)$$

Örnek

$\int_1^2 \int_y^{y^3} 1\,dx\,dy = ?$ ⟵ ALAN

$$\longrightarrow x\Big|_y^{y^3} = y^3 - y$$

$$\int_1^2 (y^3 - y)\,dy = \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{9}{4}$$

orj. s. 24

Ç.K. İNTEGRALDE SINIR BELİRLEME

2 çeşit vardır. Sınır belirlenmesi için ALAN verilir.

1. çeşit: Verilen alan DİKDÖRTGEN ise integralin iki sınırında SAYI olur.

$$\int_2^5 \int_1^3 f(x,y)\,dx\,dy$$

2. çeşit: Verilen alan DİKDÖRTGEN değil ise integralin sınırlarından biri SAYI, diğeri ise FONKSİYON olur?

$$\int_1^3 \int_x^{x^3} f(x,y)\,dy\,dx$$

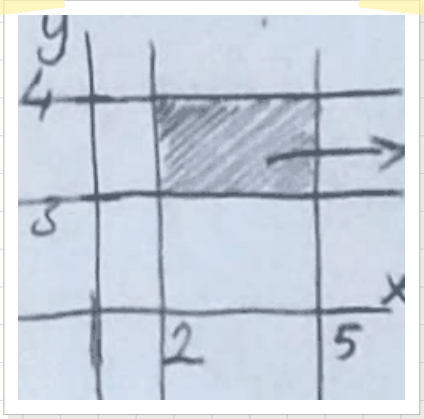
VERİLEN ALAN DİKDÖRTGEN İSE:

2 sınır da sayı olur.

Örnek

$\iint_R (x+y)\,dA$, R bölgesi $x = 2$, $x = 5$, $y = 3$ ve $y = 4$ doğruları ile sınırlanmaktadır. Bu integralin sonucu = ?

iki sınır da sayı $\longrightarrow 2 \le x \le 5, \quad 3 \le y \le 4$



orijinal çizim, s. 24

$$\int_2^5 \int_3^4 (x+y)\,dy\,dx = \int_3^4 \int_2^5 (x+y)\,dx\,dy$$

- iki sınır da sayı ise integral alma sırası direkt sınırların yerinin değiştirilmesi ile değiştirilebilir.

$$\int_2^5 \int_3^4 (x+y)\,dy\,dx = \int_2^5 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_3^4 dx = \int_2^5 \left(x + \frac{7}{2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{7x}{2}\right)\Big|_2^5$$

$$= 30 - 9 = 21 \longrightarrow \text{HACİM}$$

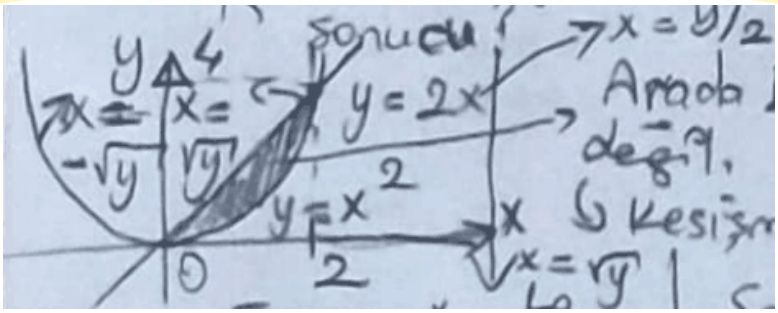
VERİLEN ALAN DİKDÖRTGEN DEĞİLSE:

1 sınır SAYI

1 sınır FONKSİYON sınırı Sayı $\longleftarrow \iint \longrightarrow$ Fonksiyon sınırı

Örnek

$\iint_R xy\,dA$, R bölgesi $y = x^2$ ve $y = 2x$ fonk. nın sınırladığı bölgededir. Bu integralin sonucu?



orijinal çizim, s. 24

Arada kalan alan dikdörtgen değil.

kesişme nokt. $\longrightarrow x^2 = 2x, \quad x^2 - 2x = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$

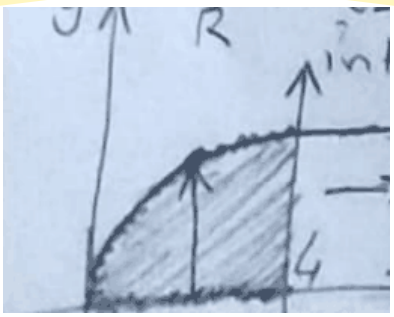
Sayı sınır x'te: $0 \le x \le 2$
Fonksiyon sınırı y'de: $x^2 \le y \le 2x$ Aşağıdan yukarı

Sayı sınır y'de: $0 \le y \le 4$
Fonksiyon sınırı x'de: $\frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y}$ soldan sağa

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy \, dy \, dx = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} xy \, dx \, dy$$

Örnek

$\iint_R (x + y) \, dA$, R bölgesi $y = \sqrt{x}$, $x = 4$ ve x ekseni tarafından sınırlanmaktadır. İntegralin sınırları = ?



orijinal çizim, s. 24

→ Sayı sınır x'te → $0 \le x \le 4$

→ Dikdörtgen değil. → Fonks. sınırı y'de → $0 \le y \le \sqrt{x}$ aşağıdan yukarı

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} (x + y) \, dy \, dx$$

Ç.K. İNTEGRALDE İNTEGRAL ALMA SIRASININ DEĞİŞTİRİLMESİ

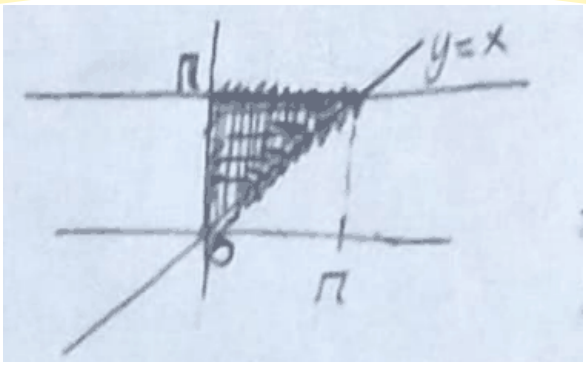
Örnek

$\int_0^{\pi}\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\, dy\, dx$ integral alma sırasını değiştirerek integralini hesaplayınız.

* İntegrali hesaplanamayan Ç.K. int. de yapılır.

1. adım:

$$\left.\begin{matrix} x \le y \le \pi \\ 0 \le x \le \pi \end{matrix}\right\} \text{ sınırlar çıkarılır} \qquad y = x \text{ ve } y = \pi$$



orijinal çizim, s. 24

2. adım: sayı sınırları y'ye $0 \le y \le \pi$, fonksiyon sınırları x'e $0 \le x \le y$ soldan sağa

$$\int_0^{\pi}\int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\, dx\, dy = \frac{\sin y}{y} \cdot x\Big|_0^{y} = \sin y \qquad \int_0^{\pi} \sin y\, dy = -\cos y\Big|_0^{\pi} = 2$$

Örnek

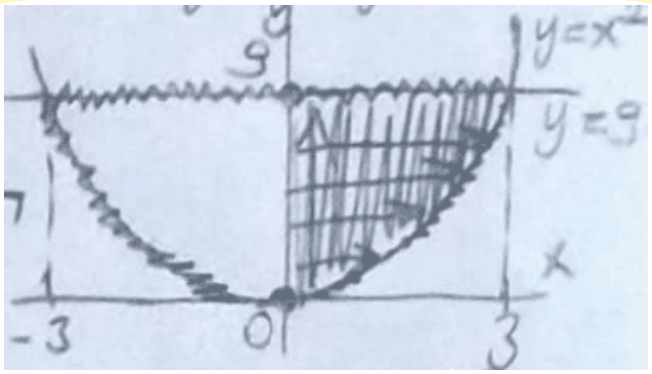
$\int_0^{3}\int_{x^2}^{9} x^3 e^{y^3}\, dy\, dx$ integrasyon sırasını değiştirerek hesaplayınız.

1. adım: $0 \le x \le 3 \rightarrow$ Sayı sınırı

$x^2 \le y \le 9 \rightarrow$ Fonksiyon sınırı $\rightarrow y = x^2 \,/\, y = 9$ Aşağıdan yukarı

sayı sınırı y'ye $\rightarrow 0 \le y \le 9$

fonk. sınırı x'e $\rightarrow 0 \le x \le \sqrt{y}$ soldan sağa



orijinal çizim, s. 24

2. adım:

$$\int_0^9\int_0^{\sqrt{y}} x^3 e^{y^3}\,dx\,dy = \int_0^9 \frac{x^4}{4} e^{y^3}\Big|_0^{\sqrt{y}} = \int_0^9 \frac{y^2}{4} e^{y^3}$$

$$\int_0^9 \frac{y^2}{4} e^{y^3} dy \Rightarrow y^3 = u \quad du = dy \cdot 3y^2 \Rightarrow \frac{1}{12}\int e^u\,du = e^{y^3}\cdot\frac{1}{12}\Big|_0^9$$

Örnek

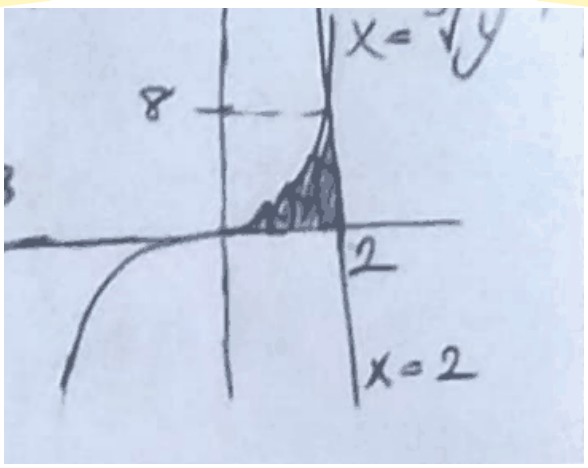
$\int_0^8\int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4+1}\,dx\,dy$ integral alma sırasını değiştirerek integralini hesaplayınız.

1. adım: $0 \le y \le 8 \rightarrow$ Sayı sınırı

$\sqrt[3]{y} \le x \le 2 \rightarrow$ Fonks. sınırı $x = \sqrt[3]{y}$ $y = x^3$ $x = 2$ soldan sağa

sayı sınırı x'e $\Rightarrow 0 \le x \le 2$

fonks. sınırı y'ye $\Rightarrow 0 \le y \le x^3$ aşağıdan yukarı



orijinal çizim, s. 24

2. adım: $\int_0^2\int_0^{x^3} \sqrt{x^4+1}\,dy\,dx$

$$= \int_0^2 \sqrt{x^4+1}\cdot y\Big|_0^{x^3} dx = \int_0^2 \sqrt{x^4+1}\cdot x^3\,dx \qquad u = x^4+1 \quad du = 4x^3\,dx$$

$$\frac{17\sqrt{17}}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\Big|\sqrt{(x^4+1)^3}\Big|_0^2 = \Big|_0^2 \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{u^3} = \int_0^2 \sqrt{u}\cdot\frac{1}{4}\,du$$

* trigonometrik ifadelerde fonks. değiştirirken ifade tersine çevrilir.

$$\cos x = y \longrightarrow x = \arccos y$$

orj. s. 25

Ç.K. İNTEGRAL YARDIMI İLE ALAN HESAPLAMA



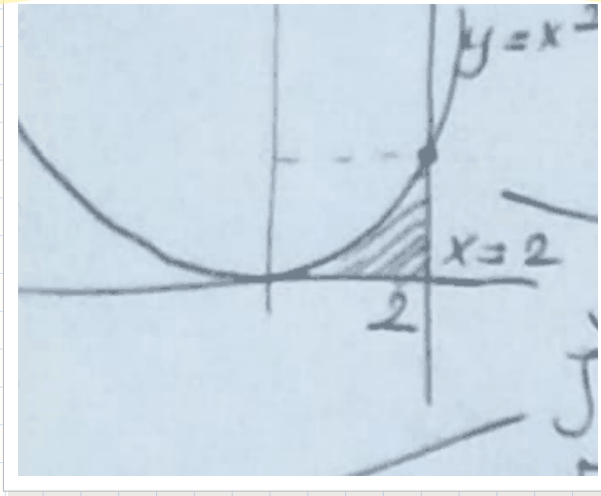
orijinal çizim, s. 25

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \text{Hacim}$$

⟶ Alan için 1 ?koyulur.

$$\iint_D \boxed{1}\,dA = \text{Alan}$$

ÖRN:



orijinal çizim, s. 25

⟶ Tek katlı integral

$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

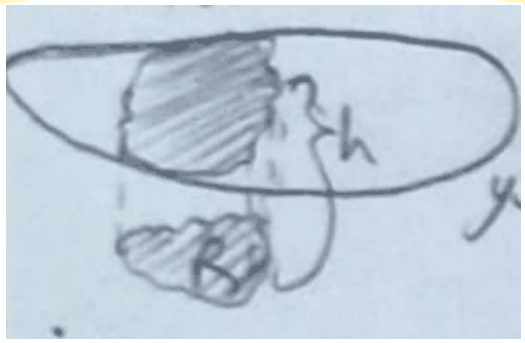
⟶ Çift katlı integral

$$\iint_D 1\,dA \longrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases} \quad \text{veya} \quad \begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ \sqrt{y} \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} 1\,dy\,dx = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 1\,dx\,dy = \int_0^2 y\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^2 x^2 = \frac{8}{3}$$

Ç.K. İNTEGRALDE ORTALAMA DEĞER HESAPLAMA

$f(x,y) \longrightarrow \mathcal{R}$ bölgesine karşılık gelen $f(x,y)$ değerlerinin ortalaması



orijinal çizim, s. 25

$f(x,y)$? yüksekliği

$$\text{ortalama değer} = \frac{\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA}{\iint_{\mathcal{R}} 1\,dA}$$

(pay: $f(x,y)$ ile $\mathcal{R}$ bölgesi arasındaki hacim; payda: $\mathcal{R}$ bölgesinin alanı)

$\mathcal{R}$ bölgesi dikdörtgen olursa:

$$\begin{matrix} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{matrix} \qquad \text{Ort. değer} = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA$$

Örnek

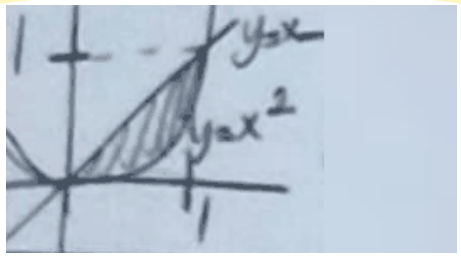
$f(x,y) = x + y$ fonks. $\mathcal{R} = \underset{x}{\overset{a}{[1}},\underset{}{\overset{b}{3]}} \times \underset{y}{\overset{c}{[1}},\overset{d}{2]}$ dikdörtgensel bölgesindeki ortalama değer = ?

$$\text{Ort. Değer} = \frac{1}{(3-1)(2-1)} \int_1^3 \int_1^2 (x+y)\,dy\,dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 \left(2x + 2 - x - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \left(x + \frac{3}{2} \right) dx = \frac{7}{2}$$

Örnek

$f(x,y) = x \cdot y$ fonks. $y = x^2$ ve $y = x$ eğrileri taraf. sınırlanan bölge için ort. değer = ?

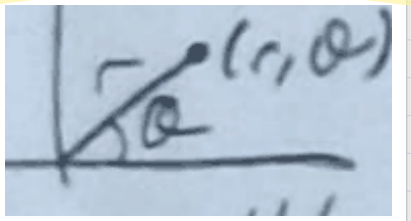


orijinal çizim, s. 25

$$\text{Ort. Değer} = \frac{\iint_R xy\,dA}{\iint_R 1\,dA} = \frac{\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy\,dy\,dx}{\int_0^1 \int_{x^2}^{x} 1\,dy\,dx} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{4}$$

KUTUPSAL KOORDİNATLAR NEDİR?

Kutupsal Koordinatlar (r, θ)



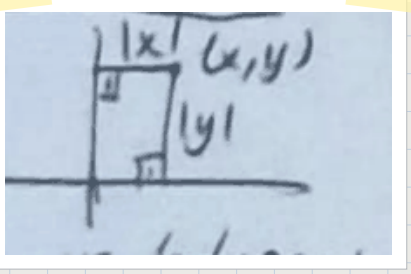
orijinal çizim, s. 25

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

r orjine olan uzaklık

θ = x ekseni ile yapılan açı

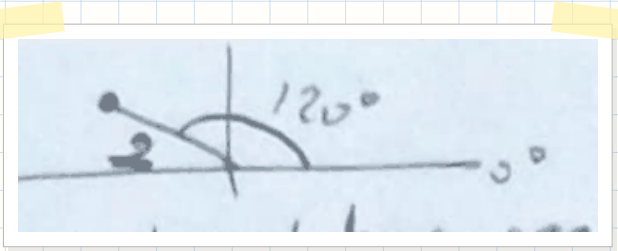
Kartezyen Koordinatlar (x, y)



orijinal çizim, s. 25

Kartezyen ve kutupsal koordinatlar aynı noktayı bize farklı bir şekilde gösterir.

(2,120) ⟶

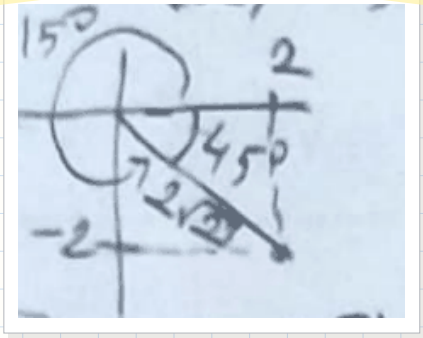


orijinal çizim, s. 25

Kartezyen koor. → Kutupsal koor. geçiş

Örnek

(2, −2) kutupsal koordinatı = ?

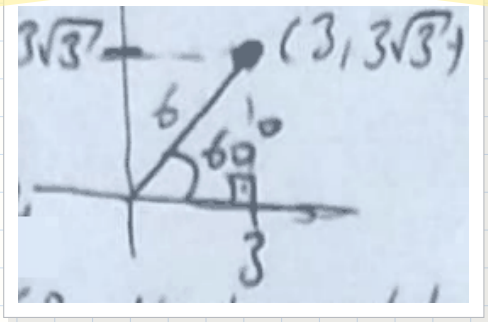


orijinal çizim, s. 25

$r = 2\sqrt{2}$ $\theta = 315°$ $(2\sqrt{2}, 315°)$

Örnek

$(3, 3\sqrt{3})$ kutupsal koordinatı = ?



orijinal çizim, s. 25

$(3, 3\sqrt{3})$ $(6, 60°) = (6, \pi/3)$

Kutupsaldan kartezyene dönüş:

$(6, \pi/2) = (0, 6)$ $(4, 2\pi/3) = (-2, 2\sqrt{3})$

KARTEZYEN DENKLEMLERİ KUTUPSAL DENKLEMLERE ÇEVİRME

Kartezyen Denklem — Kutupsal Denklem[1]

$$x + y = 5 \longrightarrow r \cdot \cos\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$x = \cos\theta \cdot r \qquad x^2 + y^2 = r^2$$
$$y = \sin\theta \cdot r \qquad r\cos\theta + r\sin\theta = 5$$

Örnek

$e^{2x} = y$ kut. denklemine çevir.

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad e^{2r\cos\theta} = r\sin\theta$$

Örnek

$(x-1)^2 + y^2 = 4$ kut. denkl. çevir.

$$(r\cos\theta - 1)^2 + (r\sin\theta)^2 = 4$$

KUT. DENK. KART. DENK. ÇEVİRME

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

KUTUPSAL KOORDİNATLARDA TÜREV

$$r = f(\theta) \quad \frac{dr}{d\theta} = f'(\theta) \qquad r = 3 + 5\cos\theta \quad \frac{dr}{d\theta} = -5\sin\theta$$

$$\left.\begin{matrix} x = f(t) \\ y = g(t) \end{matrix}\right\} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad \text{parametrik türev}$$

$$r = f(\theta) \Longrightarrow \left.\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{matrix} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

$$= \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta + f(\theta)\sin\theta}$$

Örnek

$r = 5 + 2\sin\theta$ ise $dy/dx = ?$ $\quad \frac{dr}{d\theta} = 2\cos\theta$[a]

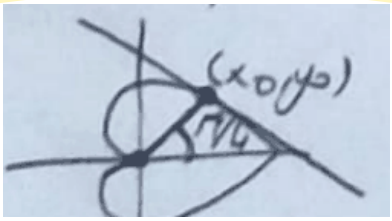
[a] Claude notu: paydaki işaret muhtemelen $f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$ olmalı (genel formülde de, bu örnekte de aynı işaret yazılmış).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos\theta\cdot\sin\theta + (5 + 2\sin\theta)\cos\theta}{2\cos\theta\cdot\cos\theta + (5 + 2\sin\theta)\sin\theta}$$

[1] Claude notu: sağdaki ifade aşağıdaki işlemle uyuşmuyor; muhtemelen $r\cos\theta + r\sin\theta = 5$ olmalı.

KUT. KOOR. TEĞET DOĞRU DENKLEMİ BULMA

$r = f(\theta)$, $\theta = \theta_0$ nokt. çizilen teğet doğru:



orijinal çizim, s. 25

1. adım: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\theta_0}$ = teğetin eğimi

2. adım: $x = r\cos\theta = f(\theta_0)\cos\theta_0 = x_0$ $\quad y = r\sin\theta = f(\theta_0)\sin\theta_0 = y_0$

3. adım: $(y - y_0) = m \cdot (x - x_0)$

orj. s. 26

Örnek

$r = 3 + 8\sin\theta$ eğrisine $\theta = \pi/6$ nokt. çizilen teğet doğrunun denklemini bulunuz.

1. adım:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta}$$

$$\frac{11\sqrt{3}}{5} = \frac{\frac{11\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{8\cos\theta\sin\theta + (3 + 8\sin\theta)\cos\theta}{8\cos\theta\cos\theta - (3 + 8\sin\theta)\sin\theta}$$

2. adım:

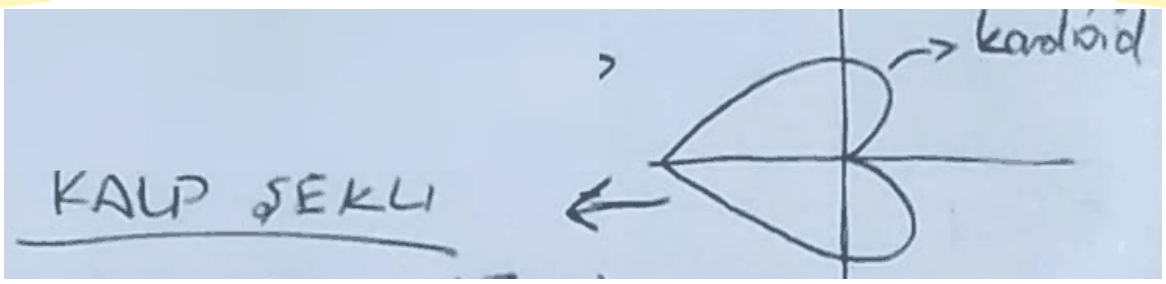
$$\left.\begin{aligned} x = r\cos\theta &= (3 + 8\sin\theta)\cos\theta = \frac{7\sqrt{3}}{2} \\ y = r\sin\theta &= (3 + 8\sin\theta)\sin\theta = \frac{7}{2} \end{aligned}\right\} \left(\frac{7\sqrt{3}}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

3. adım: $(y - y_0) = m \cdot (x - x_0) \longrightarrow y - \frac{7}{2} = \frac{11\sqrt{3}}{5}\left(x - \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$

KARDİOİD NEDİR VE NASIL ÇİZİLİR?

Kutupsal Denklemle $(r, \theta) \longrightarrow r = 1 + \sin\theta$

Grafiklerin özel bir şekline kardioid denir $\longrightarrow$ KALP ŞEKLİ



orijinal çizim, s. 26

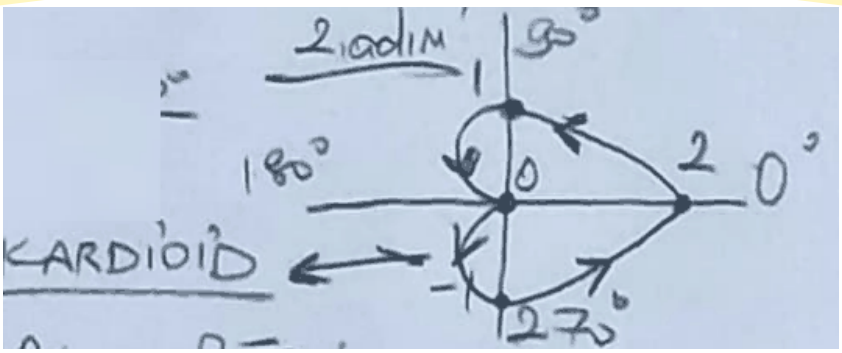
Örnek

$r = 1 + \cos\theta$ grafiğini çizin.

1. adım:

θ	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
r	2	1	0	1	2

2. adım:



orijinal çizim, s. 26

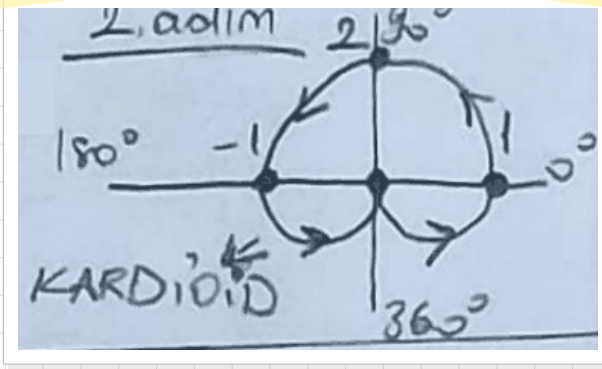
Örnek

$r = 1 + \sin\theta$ grafiğini çiziniz.

1. adım

θ	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
r	1	2	1	0	1

2. adım



orijinal çizim, s. 26

ÇEMBER BELİRTEN KUTUPSAL EĞRİLERİN GRAFİĞİNİ ÇİZME

1. çeşit $\longrightarrow$ $r = a$, $a > 0$ Merkezi $(0,0)$, yarıçapı a olan çember

2. çeşit $\longrightarrow$ $r = a\cos\theta$, $a \neq 0$, Merkezi $\left(\frac{a}{2},0\right)$, yarıçapı $= \left|\frac{a}{2}\right|$

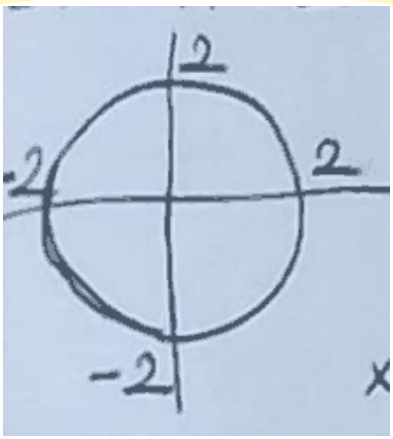
3. çeşit $\longrightarrow$ $r = b\sin\theta$, $b \neq 0$, Merkezi $\left(0,\frac{b}{2}\right)$, yarıçapı $= \left|\frac{b}{2}\right|$

Claude ile dijitalleştirildi · hata içerebilir / Digitised with Claude · may contain errors

$r = a\cos\theta + b\sin\theta$, $a \neq 0$ $b \neq 0$, Merkezi $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ yarıçapı = ...

Örnek

$r = 2$



orijinal çizim, s. 26

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

$M(0,0)$ $r = 2$

Örnek

$r = 4\cos\theta$ $M(2,0)$ $r = 2$



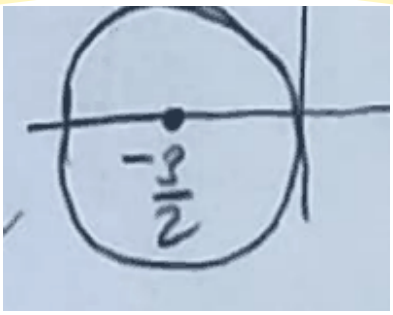
orijinal çizim, s. 26

$$\sqrt{x^2+y^2} = 4 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (x-2)^2 + y^2 = 4$$

Örnek

$r = -3\cos\theta \quad M\left(-\frac{3}{2},0\right) \quad r = \frac{3}{2}$[a]

[a] Claude notu: merkez (−3/2,0) olduğundan alttaki denklem muhtemelen $(x+\frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ olmalı.



orijinal çizim, s. 26

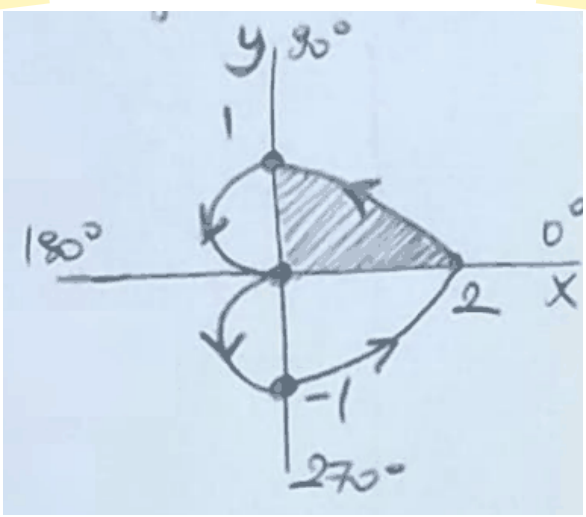
$$\sqrt{x^2+y^2} = -3 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

KARDİOİD ALAN HESAPLAMA

Örnek

$r = 1 + \cos\theta$ kardioidinin grafiğini çiziniz ve 1. bölgede kardioidin iç bölgesinde kalan alanı hesaplayınız.

θ	0°	90°	180°	270°	360°
r	2	1	0	1	2



orijinal çizim, s. 26

$$\text{Alan} = \boxed{\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3\pi}{8}+1}}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

Örnek

$r = \sin(2\theta)$ kardioidini çiziniz ve kardioidin içinde kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

θ	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$225°$	$270°$	$315°$	$360°$
r	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

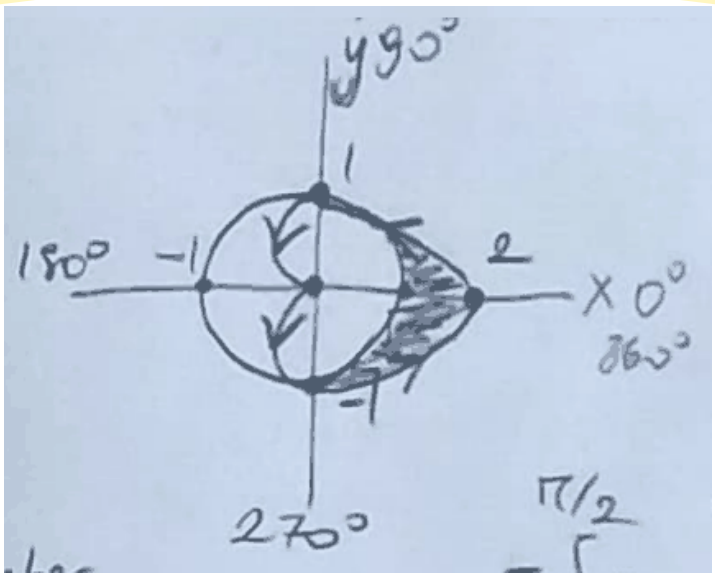
$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta = 8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\sin 2\theta)^2\,d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta$$

$$(\sin 2\theta)^2 = \frac{1-\cos 4\theta}{2} \qquad = 4\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 4\theta}{8}\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \underline{\pi/2}$$

Örnek

$r = 1+\cos\theta$ kardioidinin içinde ve $r = 1$ çemberinin dışında kalan alanı bulunuz.



orijinal çizim, s. 26

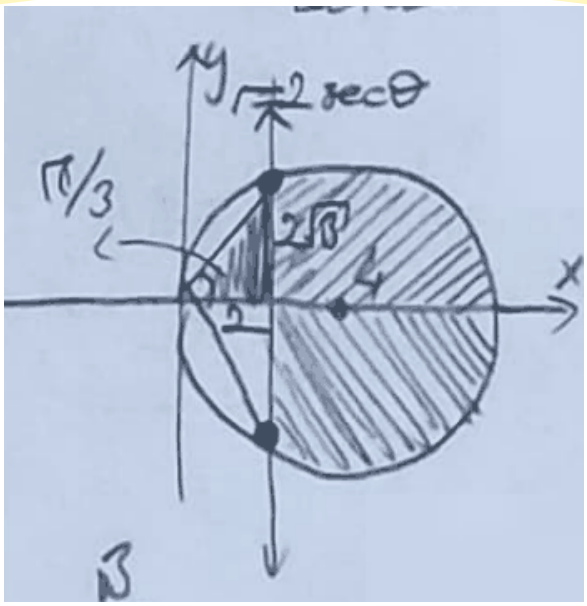
$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(r_1^2 - r_2^2\right)d\theta$$

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left((1+\cos\theta)^2 - 1^2\right)d\theta \qquad \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(2\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta = 2 + \frac{\pi}{4}$$

Örnek

$r = 8\cos\theta$ çemberinin içinde, $r = 2\sec\theta$ doğrusunun sağında kalan bölgenin alanını bulunuz.



orijinal çizim, s. 26

$\longrightarrow \left(\frac{a}{2},0\right) \quad r = \left|\frac{a}{2}\right| \qquad M(4,0) \quad r = 4$

$$r\cos\theta = 2 \quad r = \frac{2}{\cos\theta} \qquad x = 2 \quad x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

$$8\cos\theta = \frac{2}{\cos\theta} \longrightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$$

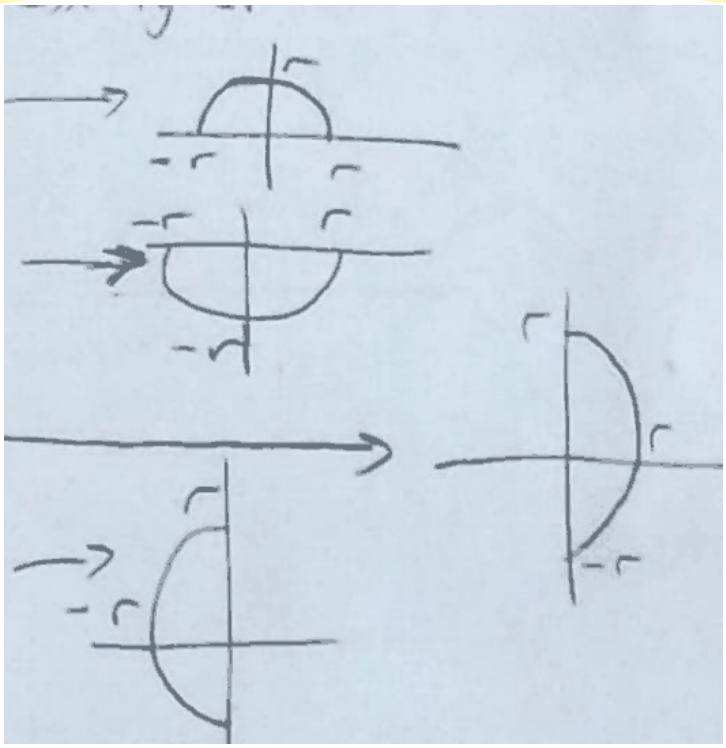
$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\, d\theta = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (8\cos\theta)^2\, d\theta - \frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = \frac{32\pi}{3} + 4\sqrt{3}$$

orj. s. 27

ÇİFT KATLI İNTEGRALLERİ KUTUPSAL KOORDİNATLARA DÖNÜŞTÜREREK ÇÖZME

Çember denklemi $\longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$

1) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$
2) $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$
3) $x = \sqrt{r^2 - y^2}$
4) $x = -\sqrt{r^2 - y^2}$



orijinal çizim, s. 27

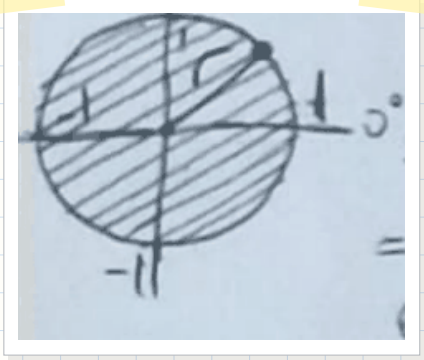
Kutupsal Koordinatlara Çevrim

1) $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$
2) $x^2 + y^2 = r^2$
3) $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$\underbrace{\iint f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{sınırlar } x,y} = \underbrace{\iint f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta}_{\text{sınırlar } r \text{ ve } \theta}$$

Örnek

$\iint_{\mathcal{R}} e^{x^2+y^2}\,dA$, $\mathcal{R}$ bölgesi merkezi orijin olan birim $\mathcal{R}$ çember. Buna göre integralin sonucu nedir?



orijinal çizim, s. 27

$0 \le r \le 1$
$0 \le \theta \le 2\pi$

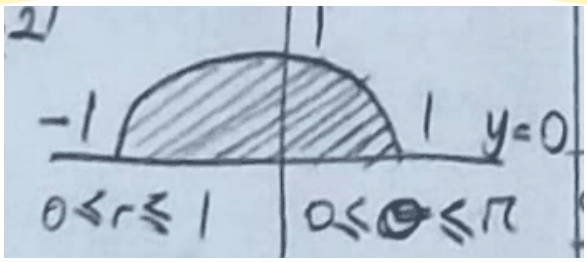
$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2}\,r\,dr\,d\theta \qquad \frac{du}{2} \to du = 2r\,dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \int e^{u} \cdot \frac{du}{2} \Big|_0^1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} e^{r^2} \Big|_0^1 = \int_0^{2\pi} \frac{e-1}{2}\, d\theta = (e-1)\pi$$

Örnek

$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx = ?$ Sınırlarında çember denklemi içerenler kutupsal koord. dönüş. çözülmelidir?

$$\begin{matrix} 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ -1 \le x \le 1 \end{matrix} \longrightarrow y = 0,\ y = \sqrt{1-x^2}$$



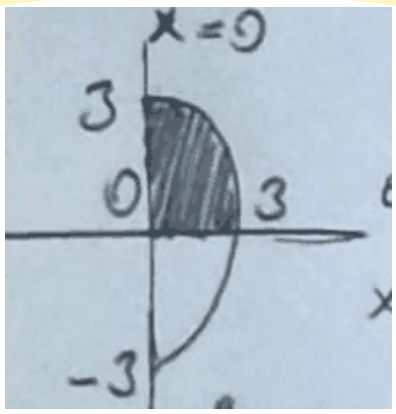
orijinal çizim, s. 27

$$\int_0^{\pi} \int_0^{1} r\, dr\, d\theta = \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \qquad \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\, d\theta = \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Örnek

$\int_{0}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-y^2}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = ?$

$$0 \le y \le 3 \qquad 0 \le x \le \sqrt{9-y^2} \qquad x = 0,\ x = \sqrt{9-y^2}$$



orijinal çizim, s. 27

$$0 \le r \le 3 \qquad 0 \le \theta \le \pi/2 \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{3} \left(e^{-r^2}\, r\, dr \right) d\theta \longrightarrow u \qquad \int e^{-u}\, \frac{du}{2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^3$$

$$\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-9}+\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}e^{-9}+\frac{1}{2}\right)\cdot\theta\Big|_0^{\pi/2} \longleftarrow \int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{2}e^{-9}+\frac{1}{2}\right)d\theta$$

MERKEZİ ORJİN OLMAYAN ÇEMBER İÇİN Ç.K. İNTEGRALDE KUTUPSAL DÖNÜŞÜM

Örnek

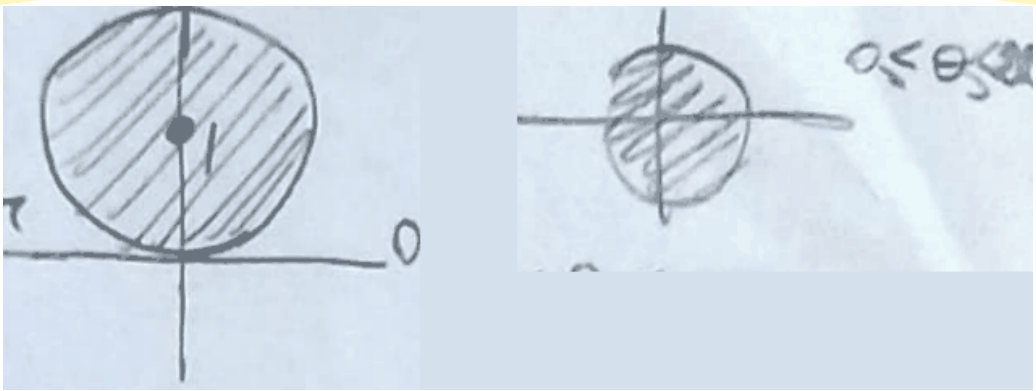
$\iint_{\mathcal{R}}(12-6x-4y)\,dA$ integralinin sonucunu $\mathcal{R}: x^2+y^2=2y$ çemberinin iç bölgesi olmak üzere bulunuz.

1. adım:

$$x^2+y^2=r^2 \longrightarrow r^2=2r\sin\theta \qquad x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$$

$$r=a\sin\theta \rightarrow M\left(0,\tfrac{a}{2}\right)\ r=\left|\tfrac{a}{2}\right| \qquad r=2\sin\theta$$

$$r=a\cos\theta \rightarrow M\left(\tfrac{a}{2},0\right) \rightarrow r=\left|\tfrac{a}{2}\right| \qquad dx\,dy=r\,dr\,d\theta$$



orijinal çizim, s. 27

2. adım: $0\le\theta\le\pi \qquad 0\le r\le 2\sin\theta$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}(12-6r\cos\theta-4r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$-\frac{8}{3}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta=\int_0^{\pi}\left[6r^2-2r^3\cos\theta-\frac{4r^3}{3}\sin\theta\right]_0^{2\sin\theta}d\theta$$

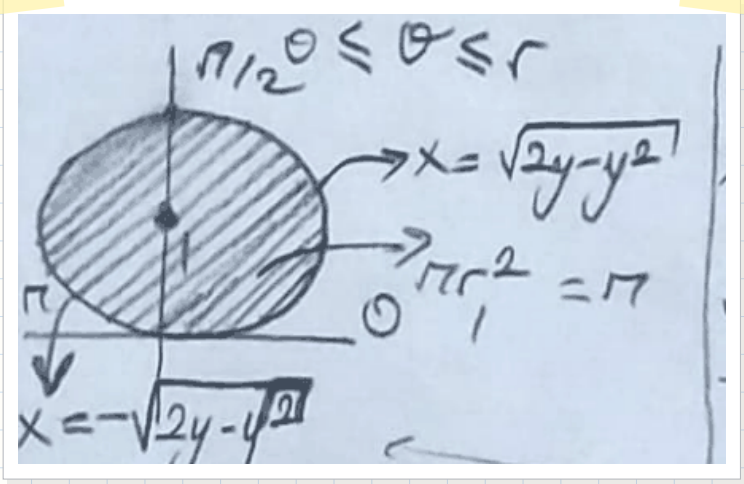
$$=8\pi$$

Örnek

$\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r\,dr\,d\theta$ integralini kartezyen koordinatlara çeviriniz.

1. adım: $0\le r\le 2\sin\theta \longrightarrow r=0$ ve $r=2\sin\theta \qquad M(0,1) \quad r=1$

$$0\le\theta\le\pi$$



orijinal çizim, s. 27

2. adım: $r\,dr\,d\theta = dx\,dy$

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad \boxed{?\ dy\ dx}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad r = 2\sin\theta \qquad 0 \le y \le 2$$

$$x^2 + y^2 = 2y \longleftarrow r = \frac{2y}{r} \qquad -\sqrt{2y - y^2} \le x \le \sqrt{2y - y^2} \qquad x^2 = 2y - y^2$$

$$x = \pm\sqrt{2y - y^2}$$

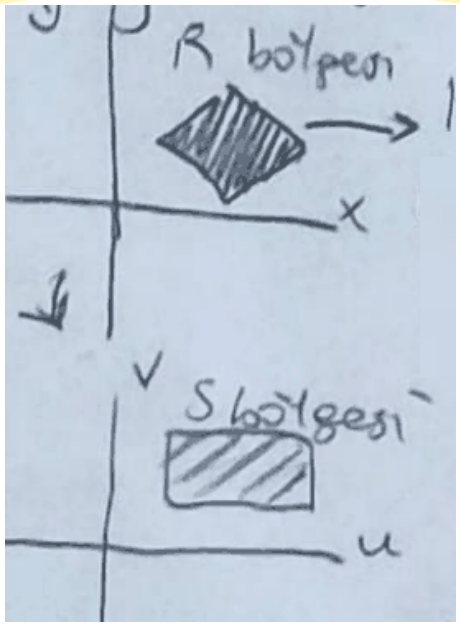
3. adım:

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} 1\,dx\,dy = \pi$$

ÇİFT K. İNTEGRALDE DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME

$$\iint_R f(x,y)\,dA \Rightarrow (x,y) \Rightarrow (u,v) \qquad (r,\theta) \longrightarrow \text{özel değişken değiştirme}$$

$\downarrow dx\,dy$ $\quad du$ ve $dv \longrightarrow \iint_S f(u,v)\,dA$



orijinal çizim, s. 27

$\mathcal{R}$ bölgesi x ve y'nin sınırlarını belirlemek oldukça zorlu bir bölge ise değişken değiştirme yöntemine başvurulur.

$$x = g(u,v) \qquad y = h(u,v)$$

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA \Rightarrow \iint_{S} f(g(u,v),h(u,v))\,\boxed{|J|}\,du\,dv$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \longleftarrow \text{determinant - jacobian}$$

orj. s. 28

Örnek

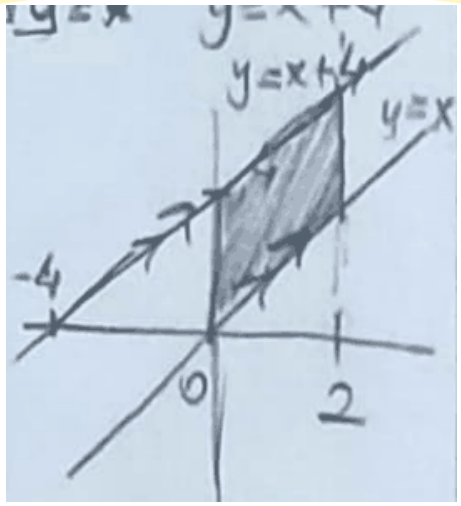
$\mathcal{R}$ bölgesi $0 \le x \le 2$ ve $x \le y \le x+4$ tarafından sınırlanan kapalı bölge olm. üzere, $\iint_{\mathcal{R}} xy\,dA$ int. $x = 2u$ ve $y = 4v + 2u$ dönüşümü yap., çözünüz.

1. adım: Jacobian hesaplanmalı

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

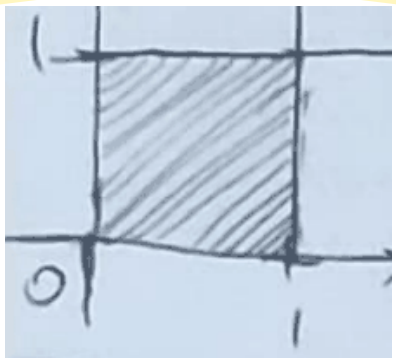
2. adım: x ve y'li bölge çizilmeli ($\mathcal{R}$ bölgesi)

$$0 \le x \le 2 \qquad x \le y \le x+4 \qquad y = x \quad y = x+4$$



orijinal çizim, s. 28

$$x = 2u$$
$$x = 0 \longrightarrow 2u = 0 \quad u = 0$$
$$x = 2 \longrightarrow 2u = 2 \quad u = 1$$
$$y = 4v + 2u$$
$$y = x \longrightarrow 4v + 2u = 2u \quad v = 0$$
$$y = x + 4 \longrightarrow 4v + 2u = 2u + 4 \quad v = 1$$



orijinal çizim, s. 28

$$0 \le u \le 1 \qquad 0 \le v \le 1$$

3. adım: $\iint_R xy\,dA \qquad x = 2u \quad y = 4v + 2u$

$$\int_0^1\int_0^1 2u\,(4v + 2u)\,|8|\,du\,dv$$

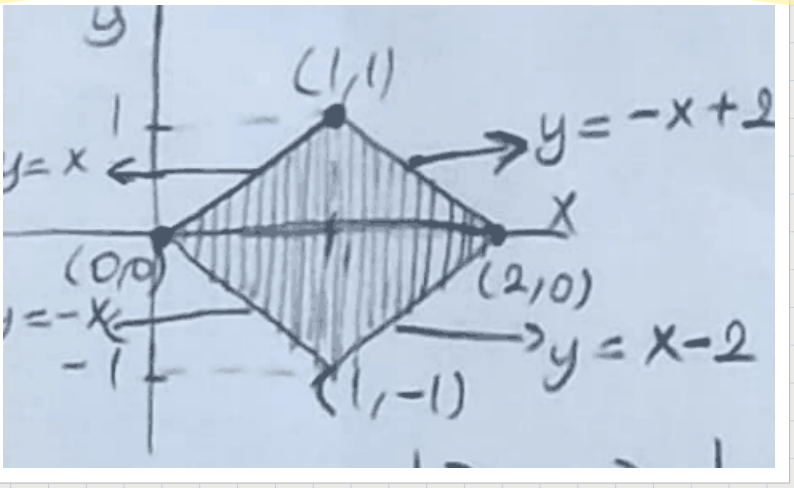
$$\int_0^1\int_0^1 (64uv + 32u^2)\,du\,dv \;=\; (v \to u)$$

$$\int_0^1 \left[32u^2v + \frac{32u^3}{3}\right]_0^1 = \int_0^1 \left(32v + \frac{32}{3}\right) dv = \frac{80}{3}$$

Örnek

$\iint_R (x-y)^2\,dA$ integ. hesapla. R bölgesi köşe koordinatları (0,0), (1,1), (2,0), (1, –1) olan kapalı dairesel bölge.

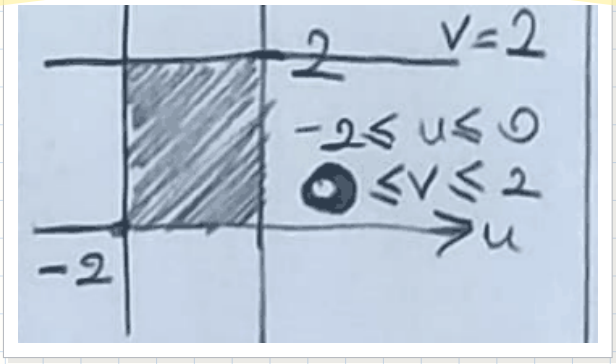
1. adım:



orijinal çizim, s. 28

2. adım: uygun değişken değiştirme. $u = y - x$ $v = y + x$ olsun.

3. adım: $u = 0$ $u = -2$ $v = 0$ $v = 2$



orijinal çizim, s. 28

$$-2 \le u \le 0 \qquad 0 \le v \le 2$$

4. adım:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \longleftarrow \begin{matrix} u = y - x \\ v = y + x \end{matrix} \longrightarrow y = \frac{u+v}{2} \quad x = \frac{v-u}{2} \longrightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

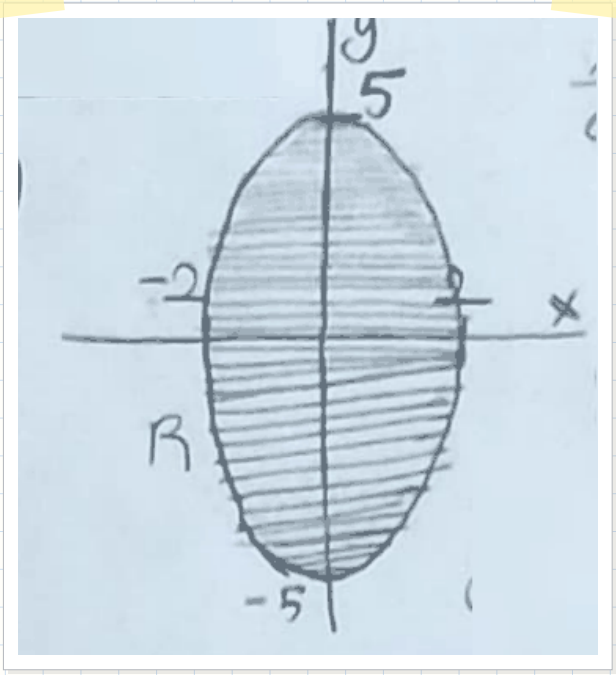
$$\iint_R (x-y)^2\,dA = \int_0^2\int_{-2}^0 u^2 \left|-\tfrac{1}{2}\right| du\,dv = \int_0^2 \frac{u^3}{6}\Big|_{-2}^0 dv = \frac{8}{3}$$

İNTEGRAL ALMA BÖLGESİ ELİPS OLAN ÇİFT KATLI İNTEGRALLER

Örnek

$\iint_R x^2\,dA$ integralini $R = \{(x,y) \mid 25x^2 + 4y^2 \le 100\}$ integral alma bölgesi için çöz.

1. adım:



orijinal çizim, s. 28

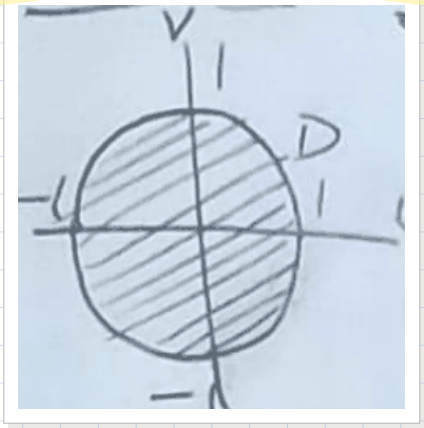
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1 \qquad a = 2 \quad b = 5$$

İntegral alma bölgesi ELİPS ise değişken değiştirme yaparak ÇEMBERE dönüştürülecek.

$$\left.\begin{aligned} x &= 2u \\ y &= 5v \end{aligned}\right\} \quad \frac{4u^2}{4} + \frac{25v^2}{25} \le 1 \Rightarrow u^2 + v^2 \le 1$$

2. adım:

$$J\ (\text{jacobian}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 \qquad \begin{aligned} 0 &\le r \le 1 \\ 0 &\le \theta \le 2\pi \end{aligned}$$



orijinal çizim, s. 28

$$\iint_R x^2\,dA = \iint_D 4u^2\,|10|\,du\,dv$$

$$\iint_D 40u^2\,du\,dv$$

Kutupsal

$$x = r\cos\theta \longrightarrow u = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta \longrightarrow v = r\sin\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2 \longrightarrow u^2 + v^2 = r^2$$
$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta \longrightarrow du\,dv = r\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 40r^2\cos^2\theta \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$10\pi = \int_0^{2\pi} 10\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 40r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

ÜÇ KATLI İNTEGRAL NEYİ HESAPLAR?

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV \longrightarrow \int_e^f\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

HACİM HESAPLAR

$$V = \iiint_E 1\,dV$$

Örnek

$$\int_3^{-2}\int_2^7\int_1^5 dx\,dy\,dz = \text{HACİM}$$

Örnek

$$\int_1^4\int_{2x}^{x^2}\int_{x+y}^{x-y} dz\,dy\,dx = \text{HACİM}$$

NE HESAPLADIĞI BELLİ OLM. DURUM

$$\iiint_E \underbrace{f(x,y,z)}_{\text{fonksiyon değeri}}\ \underbrace{dV}_{\text{Hacim}}$$

Örnek

$\int_3^{?3}\int_2^5\int_1^4 (x + ?3\,y)\,dx\,dy\,dz$ = Hacim hesaplıyor.

Örnek

$\int_2^3\int_1^2\int_0^1 \boxed{8xyz\,dz}\,dy\,dx = ?$

$$= \int_2^3\int_1^2 \frac{8xyz^2}{2}\Big|_0^1 dy\,dx \qquad \int_2^3 \frac{4xy^2}{2}\Big|_1^2 dx$$

$$= \int_2^3 6x\,dx = 3x^2\Big|_2^3 = 15$$

Örnek

$\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{3-3x-y} dz\,dy\,dx = ?$[a]

[a] Claude notu: aşağıdaki son satırda dış integralin üst sınırı 3 yazılmış; muhtemelen 1 olmalı (sonuç 3/2 buna göre).

$$= \int_0^1 \boxed{\int_0^{3-3x} (3 - 3x - y)\,dy}\,dx$$

$$= \int_0^3 \left[3y - 3xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{3-3x} dx = \frac{3}{2}$$

orj. s. 29

$$\int_0^1\int_0^1 \boxed{\int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\,dx}\,dy\,dz = ? \longrightarrow \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + y^2x + z^2x\right)\Big|_0^1$$

$$= \int_0^1 \boxed{\int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 + z^2\right) dy}\,dz = \int_0^1 \left(\frac{y}{3} + \frac{y^3}{3} + z^2y\right)\Big|_0^1 = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} + z^2\right) dz$$

$$= 1$$

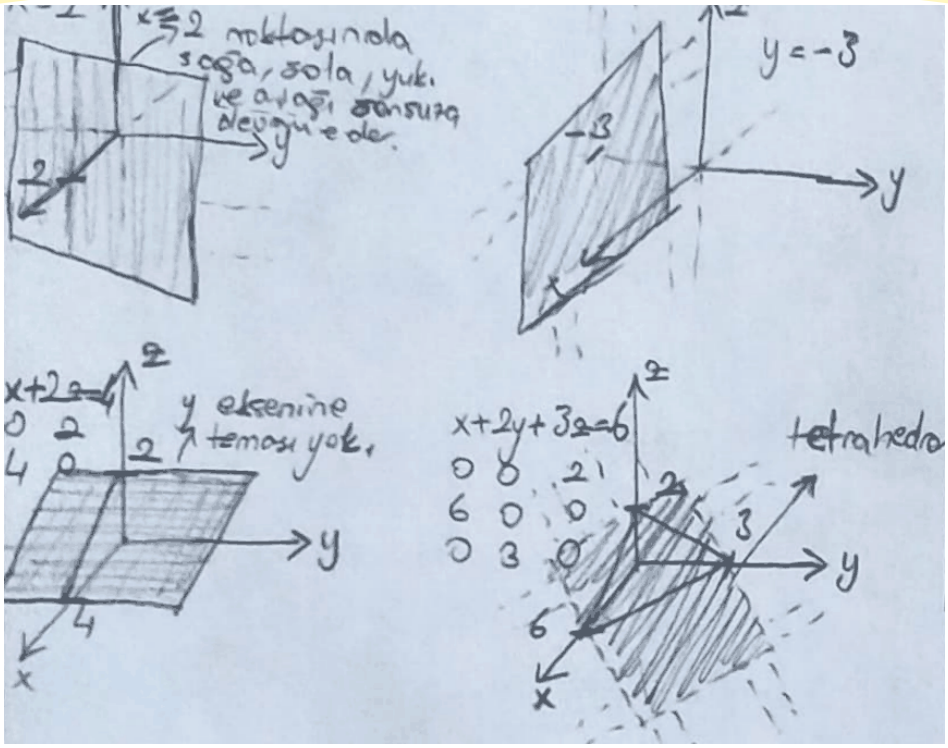
ÜÇ KATLI İNTEGRAL HESAPLAMADA BİLİNMESİ GEREKEN GRAFİK ÇİZİMLERİ

1) Düzlem Grafikleri $\longrightarrow ax + by + cz + d = 0$

$x = 2$
$y = -4$
$z = 1$

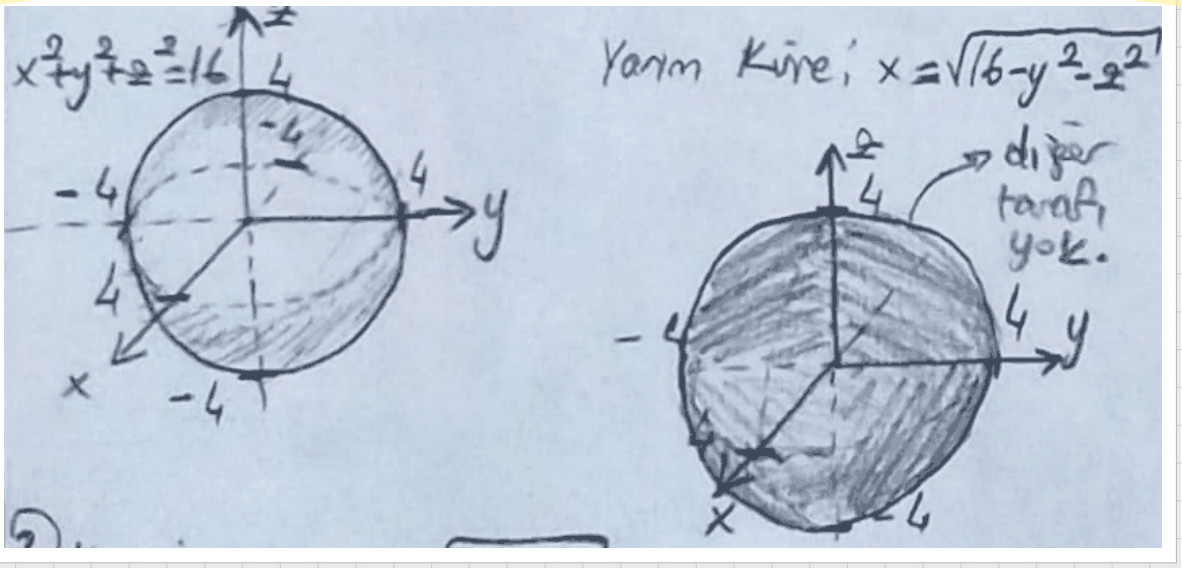
$x + z = 4$
$x - 3z = 0$

$x + y + z = 4$
$x + 2y + 3z = 12$



orijinal çizim, s. 29

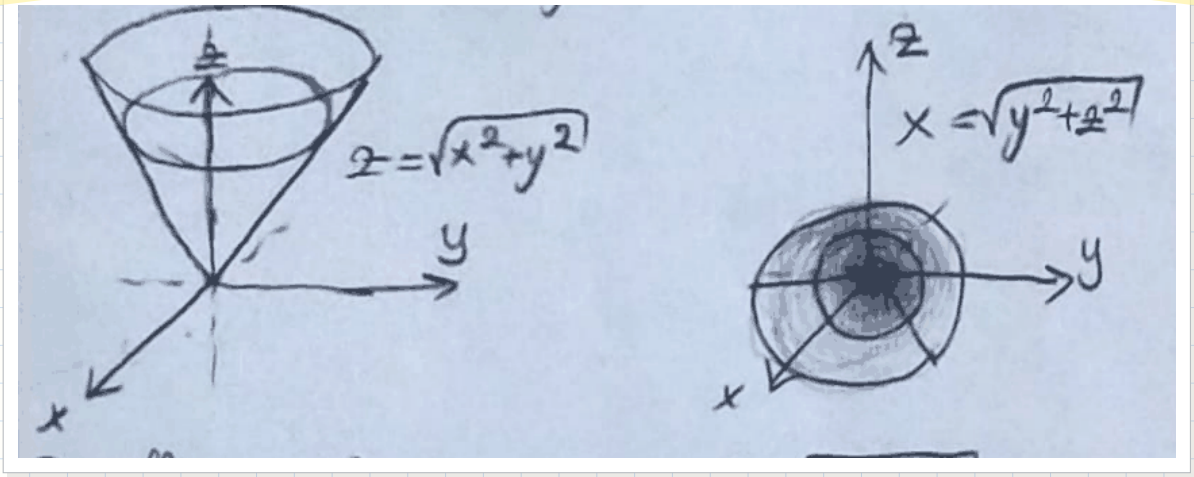
2) Küre $\longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



orijinal çizim, s. 29

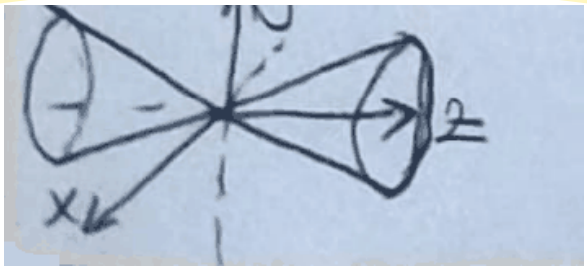
Yarım küre: $x = \sqrt{16 - y^2 - z^2}$

3) Koni $\longrightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}$



orijinal çizim, s. 29

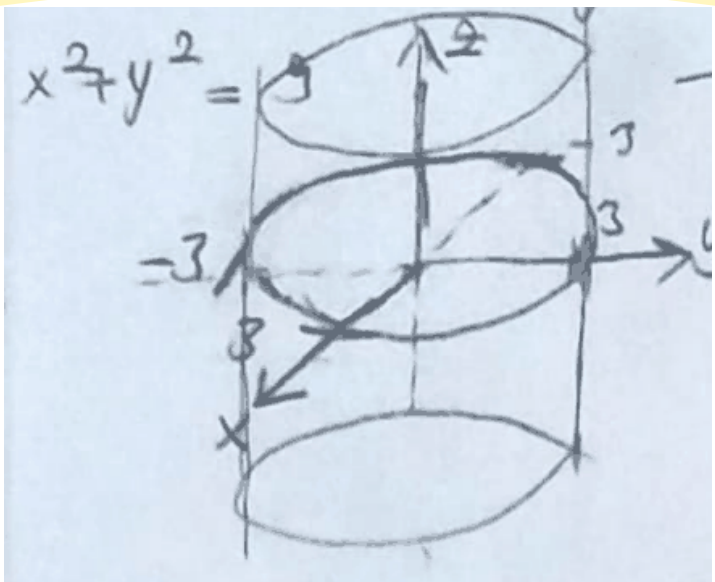
4) Çift taraflı koni $\longrightarrow z^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$[2]



orijinal çizim, s. 29

5) Silindir $\longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$

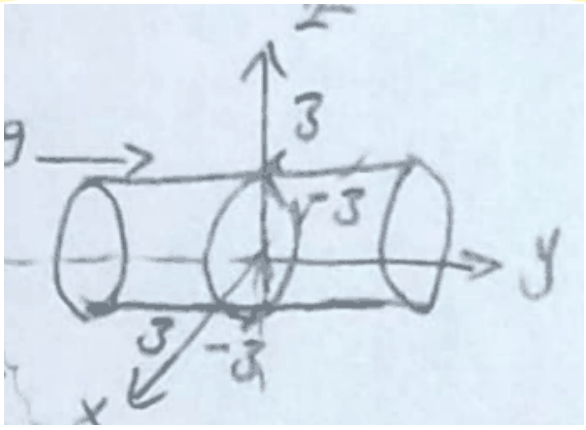
$x^2 + y^2 = 9 \longrightarrow$ z ekseni olmadığından dolayı z ekseni boyunca sonsuza kadar uzar.



orijinal çizim, s. 29

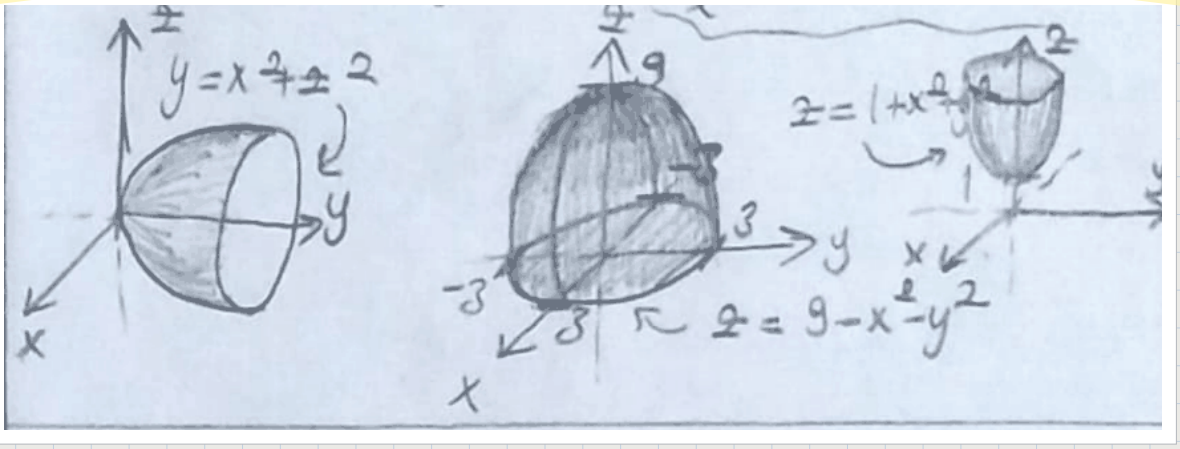
[2] Claude notu: çift taraflı koni için muhtemelen $z^2 = x^2 + y^2$ olmalı.

$x^2 + z^2 = 9 \longrightarrow$



orijinal çizim, s. 29

6) ? *Paraboloit* $\longrightarrow y = x^2 + z^2$

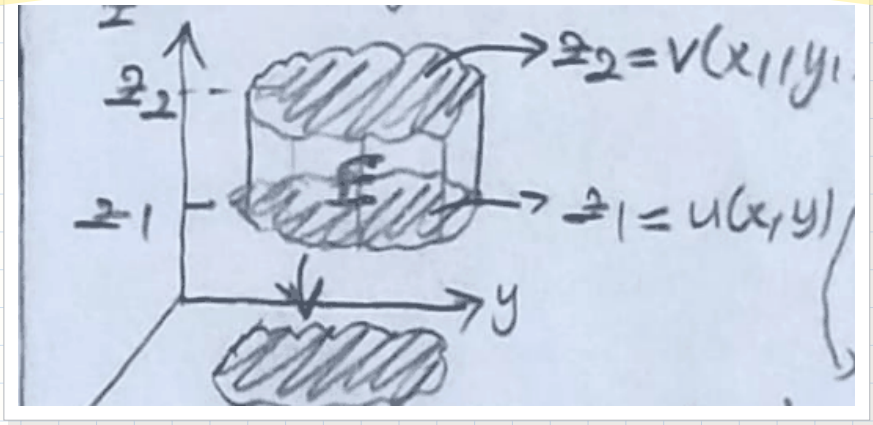


orijinal çizim, s. 29

ÜÇ KATLI İNTEGRALDE SINIR BELİRLEME

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV \qquad dV = dx\,dy\,dz = dx\,dz\,dy = dy\,dx\,dz = dy\,dz\,dx = dz\,dy\,dx = dz\,dx\,dy$$

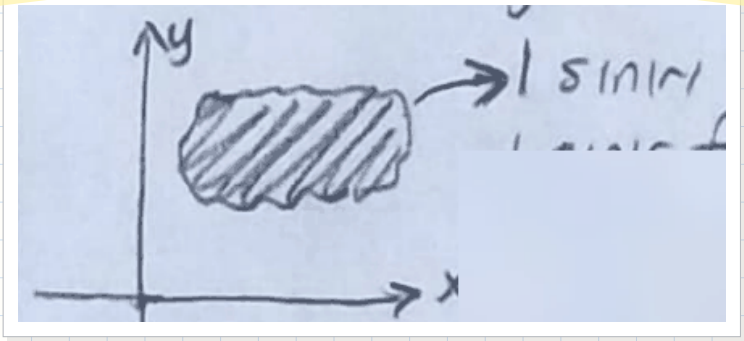
$E \longrightarrow$ Sınırların belirlenmesini sağlayan hacim



orijinal çizim, s. 29

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV \longrightarrow \begin{cases} \text{1. sınır: fonksiyon} \\ \text{2. sınır: fonksiyon} \\ \text{3. sınır: sabit sayı} \end{cases}$$

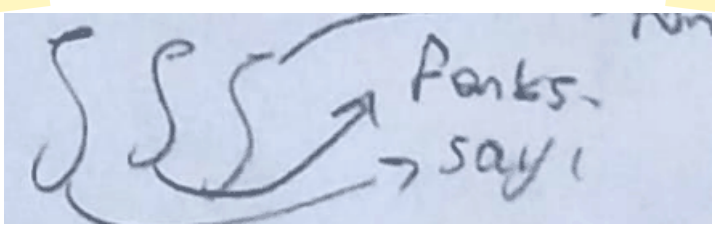
Bu hacmin xy düzlemi üzerine dik izdüşüm alanı ile x ve y sınırı belirlenir.



orijinal çizim, s. 29

$\longrightarrow$ 1 sınır sayı

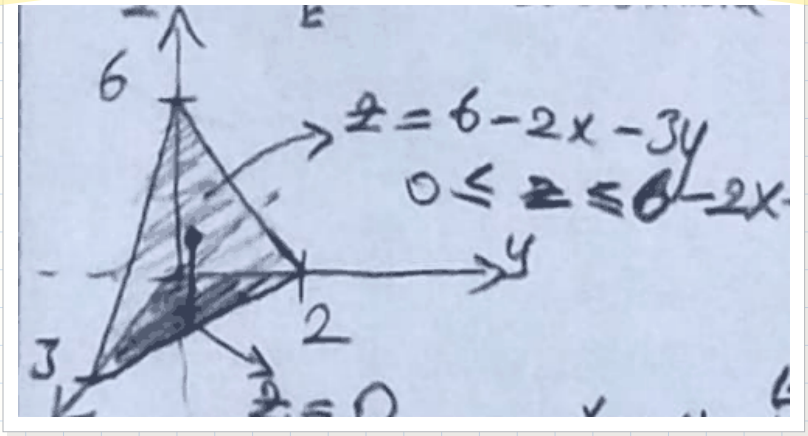
1 sınır fonksiyon olarak belirleyip sınır belirlemeyi bitiririz.



orijinal çizim, s. 29

Örnek

$\iiint_E 2x\,dV = ?$ E bölgesi $2x + 3y + z = 6$ düzlemi ile eksenler arasında 1. bölgede kalan hacim.



orijinal çizim, s. 29

$$0 \le y \le \frac{6-2x}{3} \qquad 0 \le x \le 3 \qquad \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \qquad 2x+3y=6 \qquad y=\frac{6-2x}{3}$$

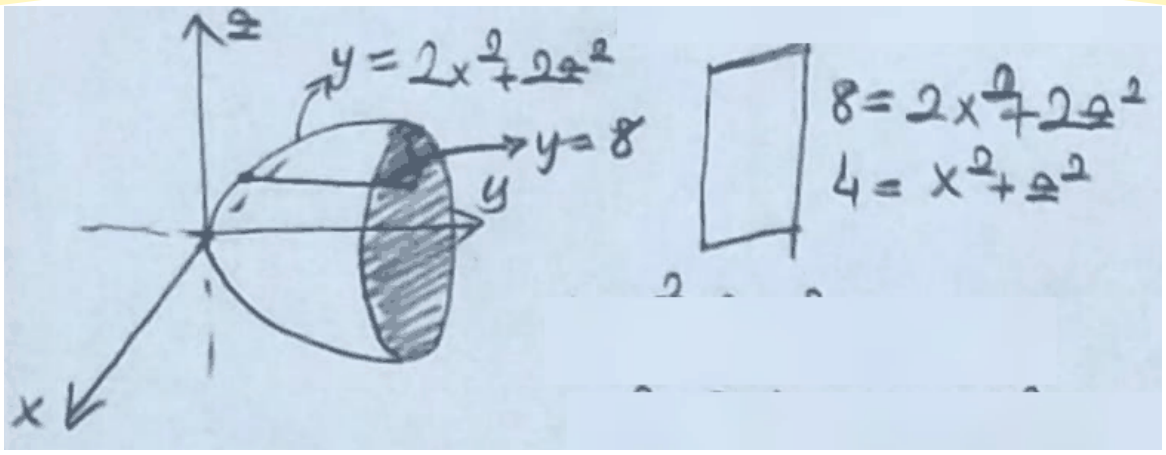
$$z = 6-2x-3y \qquad 0 \le z \le 6-2x-3y$$

orj. s. 30

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{6-2x}{3}} \int_0^{6-2x-3y} 2x \, dz \, dy \, dx$$

Örnek

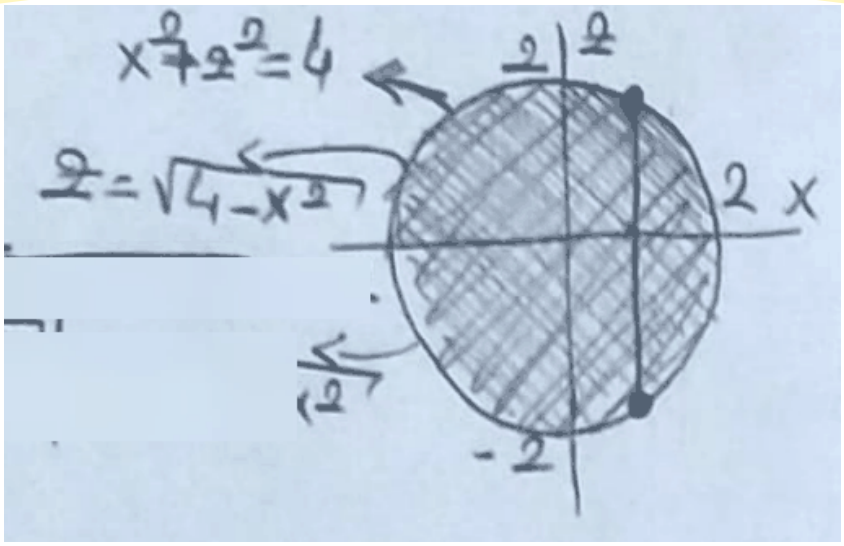
$\iiint_E \sqrt{3x^2+3z^2}\, dV = ?$ E bölgesi $y = 2x^2 + 2z^2$ ve $y = 8$ düzlemi tarafından sınırlanan hacimdir. ⟶ ?paraboloit



orijinal çizim, s. 30

$$2x^2+2z^2 \le y \le 8$$

$$x^2+z^2=4$$



orijinal çizim, s. 30

$$-2 \le x \le 2$$

xz üzerine izdüşüm

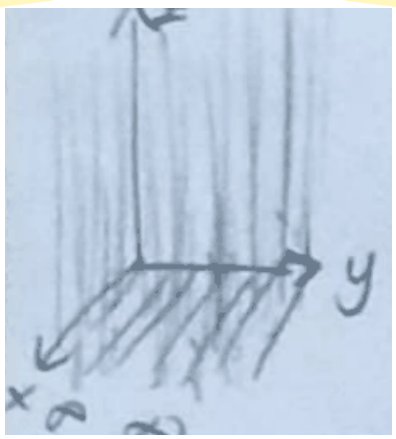
$$-\sqrt{4-x^2} \le z \le \sqrt{4-x^2}$$

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{2x^2+2z^2}^{8} \sqrt{3z^2+3x^2}\, dy\, dz\, dx$$

SONSUZ BÖLGEDE ÜÇ KATLI İNTEGRAL HESAPLAMA

Örnek

$\iiint e^{-(x+3y+5z)}\, dx\, dy\, dz$ integralinde V bölgesi $x \ge 0$, $y \ge 0$ ve $z \ge 0$ olduğuna göre integralin sonucu nedir?



orijinal çizim, s. 30

$$0 \le x \le +\infty \quad 0 \le y \le +\infty \quad 0 \le z \le +\infty \qquad \int_0^\infty \int_0^\infty \boxed{\int_0^\infty e^{-x-3y-5z}\,dx}\,dy\,dz$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x-3y-5z}\,dx \;\nearrow$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x-3y-5z}}{-1}\right)\Bigg|_0^\infty dy\,dz = \int_0^\infty \boxed{\int_0^\infty e^{-3y-5z}\,dy}\,dz$$

$$-\cancel{e^{-\infty}} + e^{-3y-5z}$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-3y-5z}}{-3}\right)\Bigg|_0^\infty dz = \int_0^\infty \left(-\frac{1}{3}\cancel{e^{-\infty}} + \frac{1}{3}\cdot e^{-5z}\right) dz = \int_0^\infty \frac{1}{3}e^{-5z}\,dz = \frac{1}{15}$$

ÜÇ KATLI İNTEGRALDE SİLİNDİRİK KOOR.LAR

$\mathbb{R}^2$ de $\to (x,y) \longrightarrow (r,\theta)$ (kartezyen koordinatla kutupsal koor.)

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad x^2 + y^2 = r^2 \qquad dy\,dx = dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

$\mathbb{R}^3$ de $\to (x,y,z) \longrightarrow (r,\theta,z)$ (kartezyen koor., silindirik koor.)

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

$$dx\,dy\,dz = r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2}\int_{z_1}^{z_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

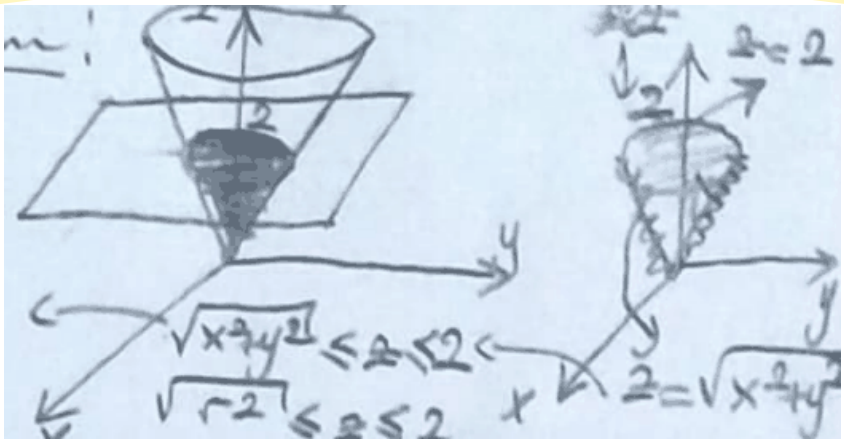
$z = x$ ve y yerine[3] $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

Örnek

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisi ile $z = 2$ düzlemi arasında kalan hacmi hesaplayınız.

$$\iiint_E 1\,dV$$

1. adım:



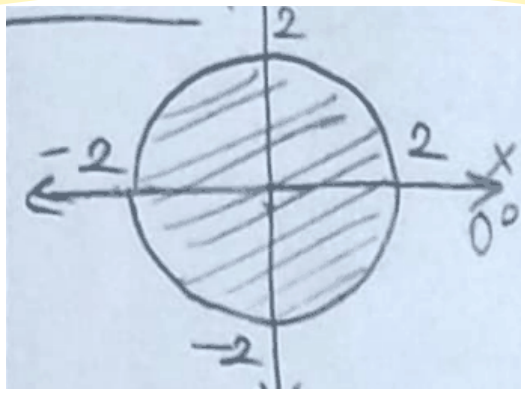
orijinal çizim, s. 30

[3] Claude notu: muhtemelen "$z = z$; x ve y yerine" demek istenmiş.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2 \qquad \sqrt{r^2} \le z \le 2 \qquad r \le z \le 2$$

2. adım:



orijinal çizim, s. 30

$$2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$4 = x^2 + y^2$$
$$0 \le r \le 2$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$

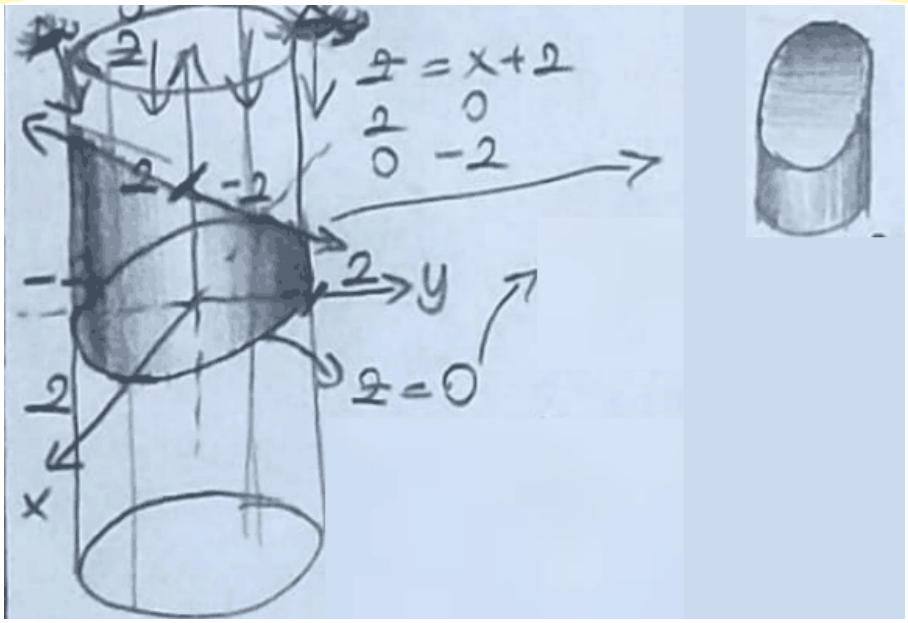
3. adım:

$$\iiint_E 1\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\boxed{\int_r^2 1\cdot r\,dz}\,dr\,d\theta \qquad \longrightarrow \qquad r\,dz\Big|_r^2 = 2r - r^2$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(2r - r^2)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{4}{3}\,d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

Örnek

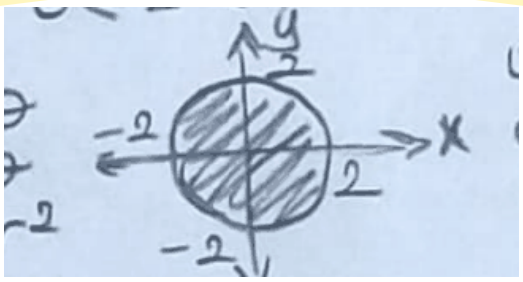
$\iiint y\,dV$, E bölgesi $z = x + 2$ düzleminin altında, E xy düzleminin üstünde ve $x^2 + y^2 = 4$ silindirinin içindeki hacim olmak üzere, integralin sonucunu silindirik koor. dönüş. hesapla.



orijinal çizim, s. 30

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

$$0 \le z \le x + 2 \qquad 0 \le z \le r\cos\theta + 2$$



orijinal çizim, s. 30

$$0 \le r \le 2 \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\iiint_E y\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{r\cos\theta+2} \underbrace{r\sin\theta \cdot r}_{r^2\sin\theta}\,dz\,dr\,d\theta =$$

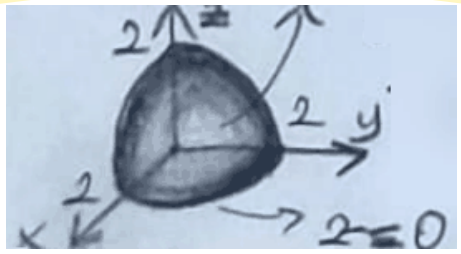
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(r^3\sin\theta\cos\theta + 2r^2\sin\theta\right)dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(2\sin 2\theta + \frac{16}{3}\sin\theta\right)d\theta$$

$$= -\frac{2\cos 2\theta}{2} - \frac{16}{3}\cos\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Örnek

E bölgesi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin birinci sekizde kalan parçası olm. üz., $\iiint_E xyz\,dV$ integralini silindirik koor. kull. hesaplayınız.

1. adım: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

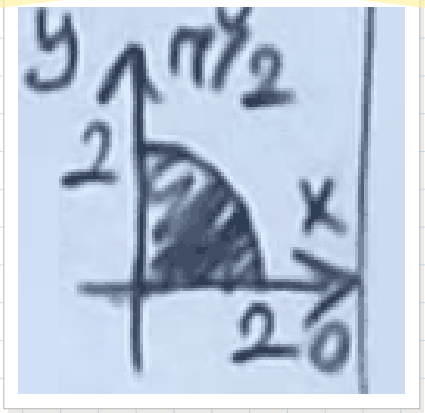


orijinal çizim, s. 30

2. adım:

$$0 \le r \le 2 \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \qquad 0 \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2} \qquad 0 \le z \le \sqrt{4-r^2}$$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad x^2+y^2 = r^2$$



orijinal çizim, s. 30

3. adım:

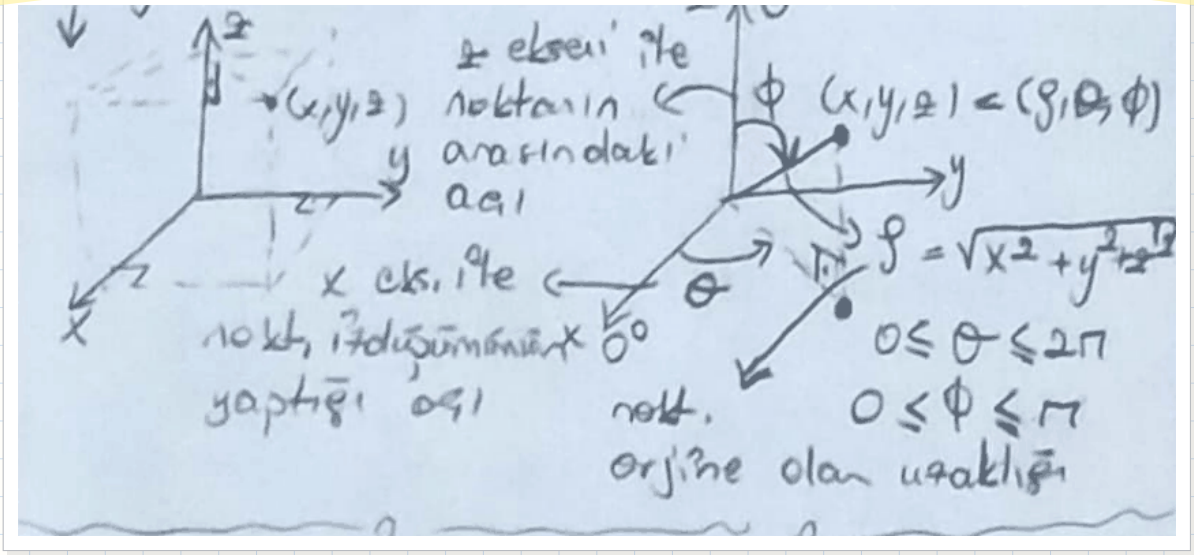
$$\iiint_E xyz\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot z \cdot r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{4}{3}$$

orj. s. 31

ÜÇ KATLI İNTEGRALDE KÜRESEL KOORDİNATLAR

$(x, y, z) \longrightarrow (\rho, \theta, \phi)$ küresel koor.lar

kartezyen koor.lar



orijinal çizim, s. 31

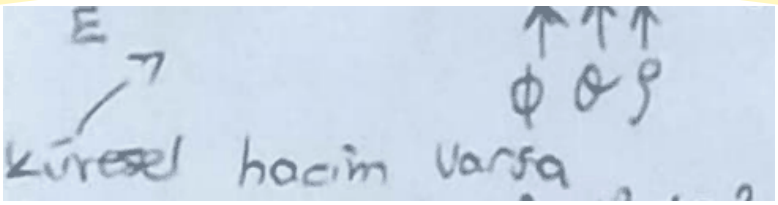
$$(x, y, z) \longrightarrow (\rho, \theta, \phi) \qquad f(x, y, z) \longrightarrow f(\rho, \theta, \phi)$$

$$x = \rho \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta \qquad y = \rho \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta \qquad z = \rho \cdot \cos\phi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \qquad \rho \geq 0 \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad 0 \leq \phi \leq \pi$$

$$dV = \rho^2 \cdot \sin\phi \cdot d\rho \cdot d\theta \cdot d\phi$$

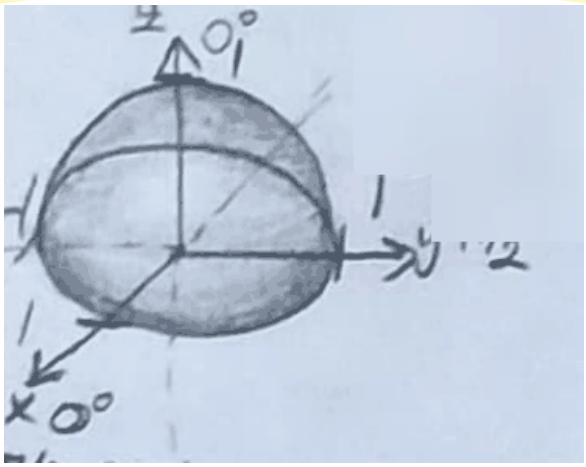
$$\iiint_E f(x, y, z) \cdot dV = \iiint f(\rho, \theta, \phi) \cdot \rho^2 \sin\phi \cdot d\rho \cdot d\theta \cdot d\phi$$



orijinal çizim, s. 31

Örnek

E bölgesi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresinin üst yarısı olm. üz., $\iiint_E 16z\, dV$ integralini küresel koorlara dönüştürerek çözünüz.



orijinal çizim, s. 31

$$0 \le \rho \le 1 \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \qquad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$$

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta \qquad y = \rho \sin\phi \sin\theta \qquad z = \rho \cos\theta$$[4]

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \qquad dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

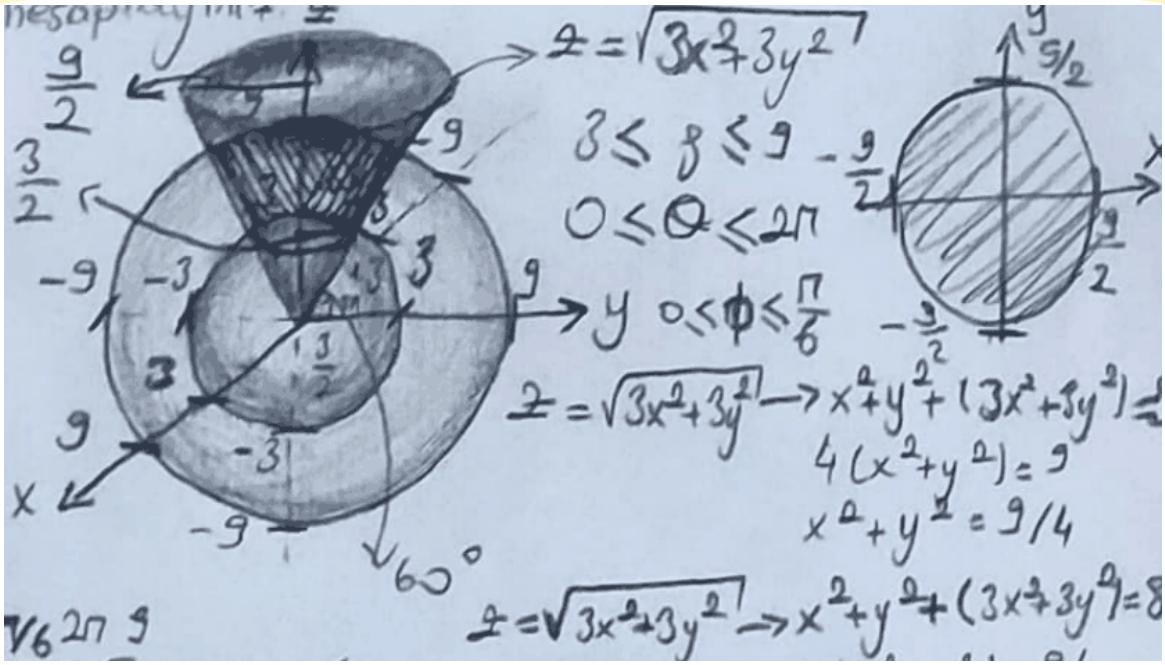
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 16\rho \cdot \cos\phi \cdot \rho^2 \cdot \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 2 \sin 2\phi \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi/2} 4\pi \sin 2\phi \, d\phi = -4\pi \frac{\cos 2\phi}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 4\pi$$

Örnek

D bölgesi $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ konisi ve $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ile $x^2 + y^2 + z^2 = 81$ küreleri arasında kalan hacimsel bölge olm. üz. int.ini küresel koor. çevirerek hesaplayınız.

[4] Claude notu: muhtemelen $z = \rho \cos\phi$ olmalı.



orijinal çizim, s. 31

$$3 \le \rho \le 9 \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \qquad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{6}$$

$$z = \sqrt{3x^2 + 3y^2} \longrightarrow x^2 + y^2 + (3x^2 + 3y^2) = 9$$

$$4(x^2 + y^2) = 9$$

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

$$z = \sqrt{3x^2 + 3y^2} \longrightarrow x^2 + y^2 + (3x^2 + 3y^2) = 81$$

$$4(x^2 + y^2) = 81$$

$$x^2 + y^2 = \frac{81}{4}$$

$$\int_0^{\pi/6} \int_0^{2\pi} \int_3^9 \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi = \boxed{12\pi - 6\pi\sqrt{3}}$$

$$dV = \rho^2 \cdot \sin\phi \cdot d\rho \cdot d\theta \cdot d\phi \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

$$z = \rho \cdot \cos\phi \qquad x = \rho \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta \qquad y = \rho \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta$$

Örnek

$\iiint_V \frac{z^6 \, e^{-3(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}}{(x^2+y^2+z^2)^4} \, dx\,dy\,dz$ integralinde V tüm uzaydır. Buna göre, bu int.in sonucu = ?

$$\begin{aligned} -\infty \le x \le \infty \\ -\infty \le y \le \infty \\ -\infty \le z \le \infty \end{aligned} \quad \begin{cases} 0 \le \rho \le \infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \phi \le \pi \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} x &= \rho \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta \\ y &= \rho \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta \\ z &= \rho \cdot \cos\phi \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho^6 \cdot \cos^6\phi \cdot e^{-3\rho}}{\rho^8} \longrightarrow \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \qquad dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \cos^6\phi \cdot \sin\phi \, d\phi \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \cdot \int_0^{\infty} e^{-3\rho} \, d\rho = \int_0^{\pi} -u^6 \, du = -\frac{u^7}{7}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{7}$$[5]

$$\cos\phi = u \qquad \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \longrightarrow 2\pi$$

$$-\sin\phi \, d\phi = du \qquad = \int_0^{\infty} e^{-3\rho} \, d\rho = \frac{e^{-3\rho}}{-3}\Big|_0^{\infty} = \frac{e^{-\infty}}{-3} + \frac{e^0}{3} = \frac{1}{3}$$

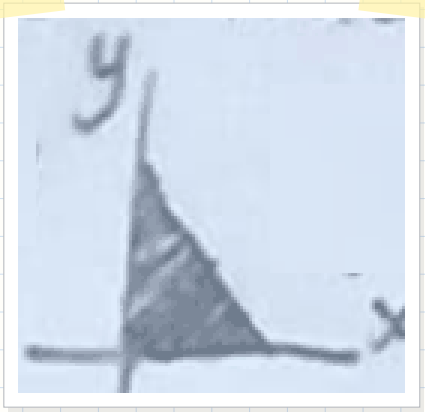
$$\boxed{\frac{4\pi}{21}} = \frac{2}{7} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3}$$

ÜÇ KATLI İNTEGRALDE İNTEGRAL ALMA SIRASI DEĞİŞTİRME

$$\iiint_E f(x,y,z) \, dV$$

$dz \longrightarrow$ önce z'nin değişimi

hacimsel bölgenin x, y düzlemine izdüşümleri $\longrightarrow$ $dx\,dy$ $dy\,dx$

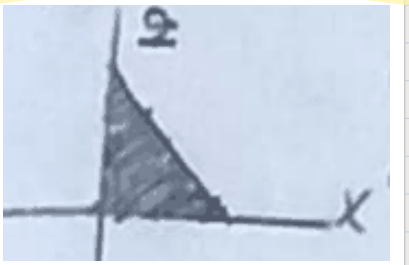


orijinal çizim, s. 31

$dy \longrightarrow$ önce y'nin değişimi

x-z düz. izdüşüm $\longrightarrow$ $dx\,dz$ $dz\,dx$

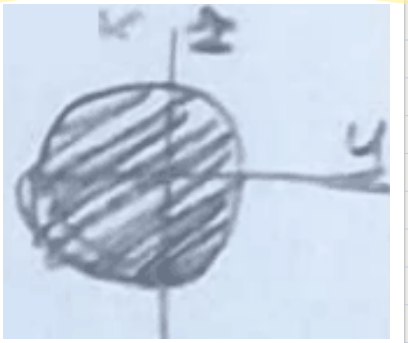
[5] Claude notu: $u = \cos\phi$ dönüşümünde sınırlar u cinsinden 1 ve −1 olmalı; 2/7 sonucu buna göre doğrudur.



orijinal çizim, s. 31

$dx \longrightarrow$ önce x'in değişimi

y-z düz. izdüşüm $\longrightarrow$ $dz\,dy \;-\; dy\,dz$



orijinal çizim, s. 31

① $dz\,dx\,dy$ ② $dz\,dy\,dx$ ③ $dy\,dx\,dz$ ④ $dy\,dz\,dx$ ⑤ $dx\,dy\,dz$ ⑥ $dx\,dz\,dy$

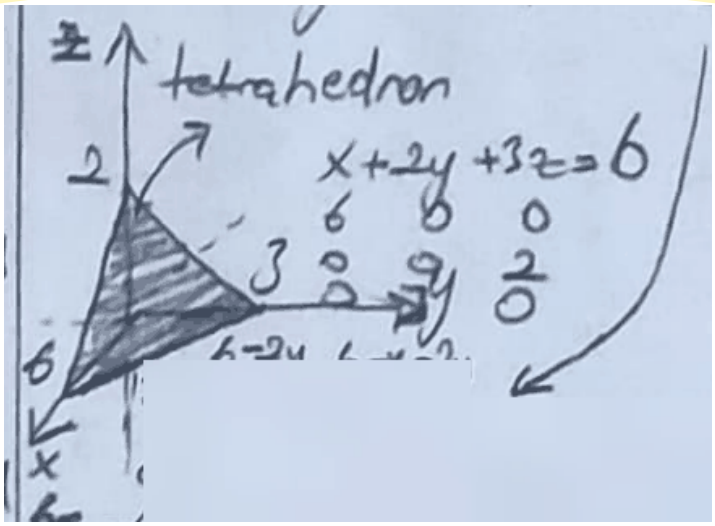
$$\int_1^2 \int_3^4 \int_{-1}^1 (x+y+z)\,dz\,dy\,dx = \int_3^4 \int_1^2 \int_{-1}^1 (x+y+z)\,dz\,dx\,dy$$

Bu tarz integrallerde izdüşüm alınmadan sıra değiştirme yapılabilir.

Örnek

$\iiint_E f(x,y,z)\,dV$, E hacimsel bölgesi $x + 2y + 3z = 6$ düzlemi ile $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ düzlemi arasında kalan küresel[a] bölge olm. üz., tüm integral alma sıralarını yazınız.

[a] Claude notu: muhtemelen "hacimsel" olmalı.



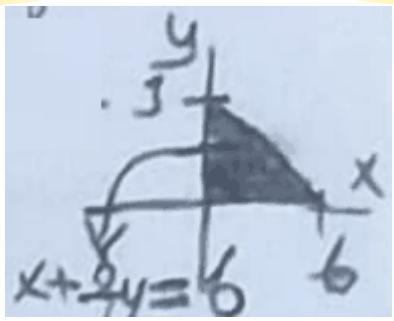
orijinal çizim, s. 31

① $\int_0^3 \int_0^{6-2y} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$

② $\int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

③ $\int_0^6 \int_0^{6-x/3} \int_0^{6-x-3z/2} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$[6]

① $0 \le z \le \dfrac{6-x-2y}{3}$
$0 \le x \le 6-2y$
$0 \le y \le 3$



orijinal çizim, s. 31

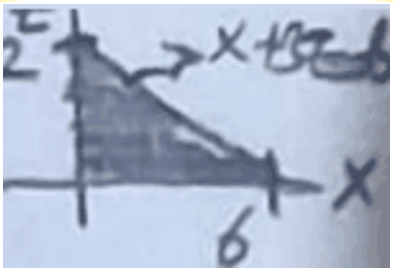
② $0 \le z \le 6-x-2y/3$
$0 \le y \le 6-x/2$
$0 \le x \le 6$

[6] Claude notu: paydalar tüm ifadeye ait olmalı: $\frac{6-x}{3}$ ve $\frac{6-x-3z}{2}$ (aşağıdaki eşitsizliklerde de aynı biçimde).

$0 \le y \le 6 - x - 3z/2$

③ $0 \le x \le 6$

$0 \le z \le 6 - x/3$



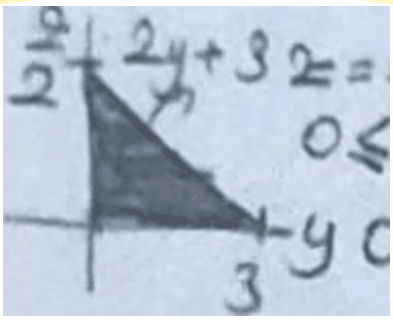
orijinal çizim, s. 31

④ $0 \le y \le 6 - x - 3z/2$

$0 \le x \le 6 - 3z \qquad 0 \le z \le 2$

orj. s. 32

⑤ $0 \le x \le 6 - 2y - 3z$



orijinal çizim, s. 32

$0 \le z \le 2$

$0 \le y \le 6 - 3z/2$

$0 \le x \le 6 - 2y - 3z$

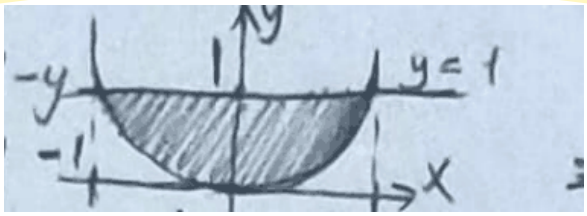
⑥ $0 \le y \le 3$

$0 \le z \le 6 - 2y/3$

Örnek

$\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_{0}^{1-y} dz\,dy\,dx$ integralinde integral alma sırasını $dx\,dy\,dz$ olacak biçimde tekrar yazınız.

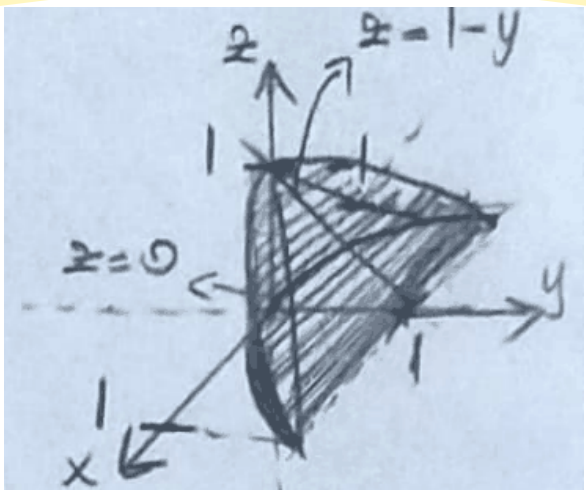
1. adım:



orijinal çizim, s. 32

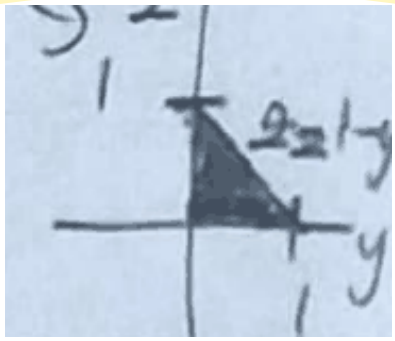
$$0 \le z \le 1 - y$$
$$x^2 \le y \le 1$$
$$-1 \le x \le 1$$

$$\begin{array}{l|l} y = x^2 & x = 1 \\ y = 1 & x = -1 \end{array}$$



orijinal çizim, s. 32

$$0 \le y \le 1 - z$$



orijinal çizim, s. 32

$$-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y} \qquad 0 \le z \le 1$$
$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 1 \, dx \, dy \, dz = \frac{8}{15}$$

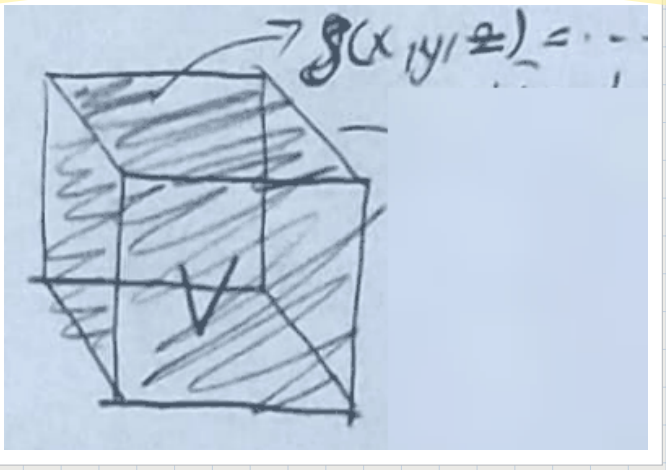
YOĞUNLUK FONKSİYONUNDAN Ü.K. İNTEGRAL İLE KÜTLE HESAPLAMA



orijinal çizim, s. 32

$\rho(x, y) \longrightarrow$ belli bir alana yerleştirilmiş kütle var.

$$M = \iint_R \rho(x, y)\, dA \longrightarrow \text{Çift katlı integraldeki hali.}$$



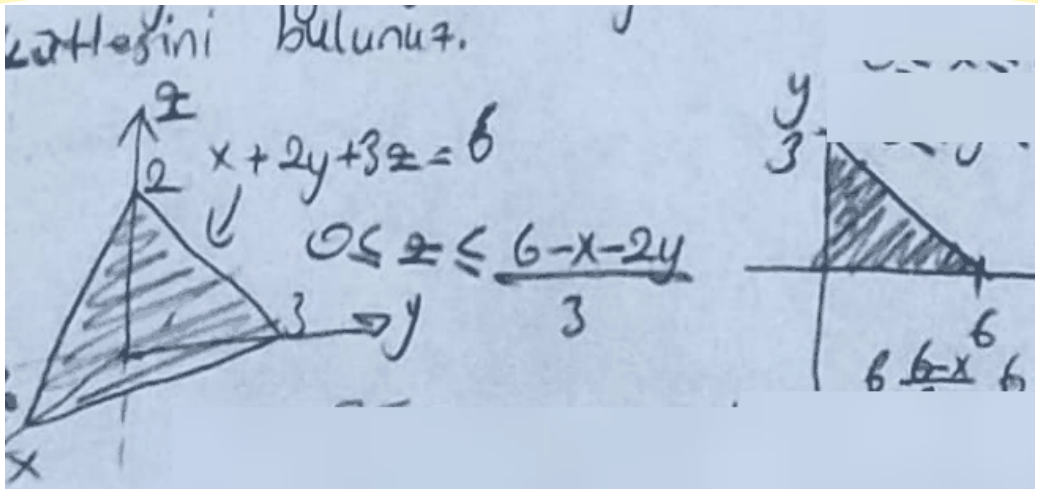
orijinal çizim, s. 32

Üç katlı integrallerde hacimsel bölgedeki kütlenin integral fonks. vardır.

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z)\, dV$$

Örnek

$x + 2y + 3z = 6$ düzlemi ve koordinat düzlemleri tarafından sınırlı hacimsel bölge için yoğunluk fonksiyonu $\rho(x, y, z) = x^2yz$ dir. Buna göre, bu bölgenin kütlesini bulunuz.



orijinal çizim, s. 32

$$0 \le x \le 6 \qquad 0 \le y \le 6 - x/2$$

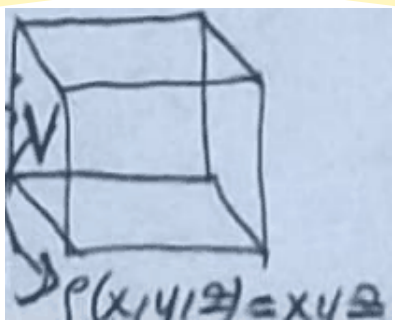
$$m = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dV = \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} x^2 yz\,dz\,dy\,dx = \frac{108}{35}$$

YOĞUNLUK FONKSİYONUNDAN Ü.K. İNT. İLE MOMENTLERİ BULMA

$$M_{xy} = \iiint_V z \cdot \rho(x,y,z)\,dV \longrightarrow x\text{-}y \text{ düzlemine göre eylemsizlik momenti}$$

$$M_{yz} = \iiint_V x \cdot \rho(x,y,z)\,dV \longrightarrow y\text{-}z \text{ düz. göre eylemsizlik moment}$$

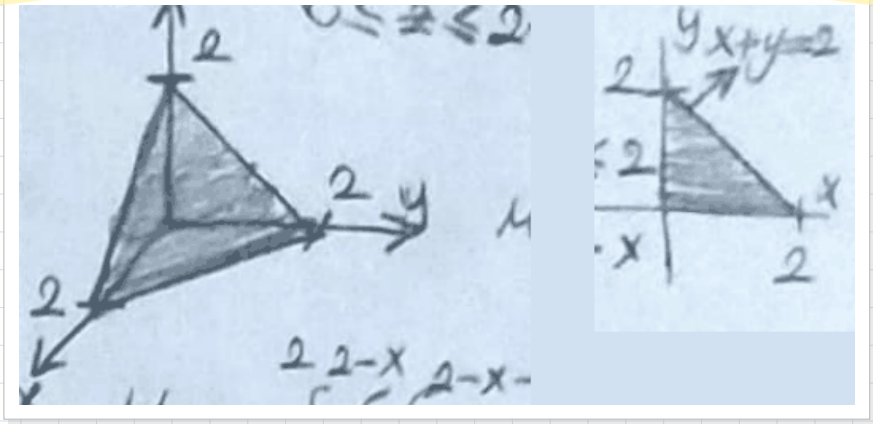
$$M_{xz} = \iiint_V y \cdot \rho(x,y,z)\,dV \longrightarrow x\text{-}z \text{ düz. göre eylemsizlik momenti}$$



orijinal çizim, s. 32

Örnek

$x + y + z = 2$ düzlemi ile koor. düzl. arasında kalan hacimsel bölgeye yerleştirilmiş cismin yoğunluk fonks. $\rho(x,y,z) = x + 2$ olarak veriliyor. Bu cismin momentini bulunuz.



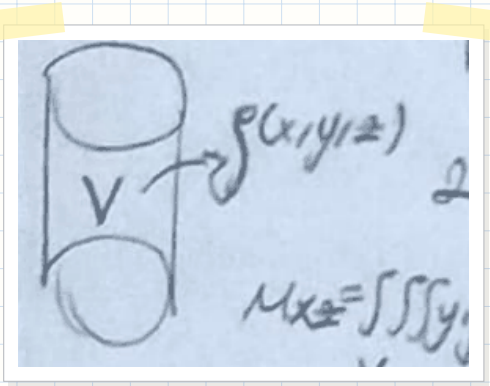
orijinal çizim, s. 32

$$0 \le z \le 2-x-y \qquad 0 \le x \le 2 \qquad 0 \le y \le 2-x$$

$$M_{xy} = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} z \cdot (x+2)\, dz\, dy\, dx$$

$$M_{yz} = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} x \cdot (x+2)\, dz\, dy\, dx \qquad M_{xz} = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} y(x+2)\, dz\, dy\, dx$$

YOĞUNLUK FONKS.DAN Ü.K. İNT. İLE AĞIRLIK MERKEZİ BULMA



orijinal çizim, s. 32

1. adım: KÜTLE: $m = \iiint_V \rho(x,y,z)\, dV$

2. adım: $M_{xy} = \iiint_V z \cdot \rho(x,y,z)\, dV$

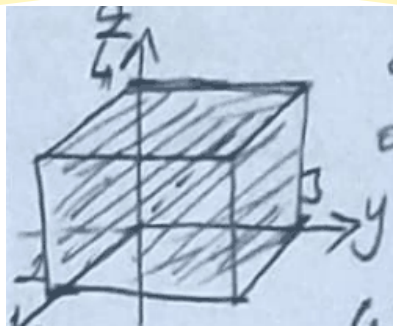
$$M_{xz} = \iiint_V y \cdot \rho(x,y,z)\, dV \qquad M_{yz} = \iiint_V x \cdot \rho(x,y,z)\, dV$$

3. adım: Ağırlık merkezi:

$$G(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \qquad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Örnek

Yoğunluğu $\rho(x,y,z) = xyz$ olan bir köşesi orjinde ve boyutları pozitif yönde 2,3,4 br olan dikdörtgenler prizmasının ağırlık merkezinin koord. bulunuz.



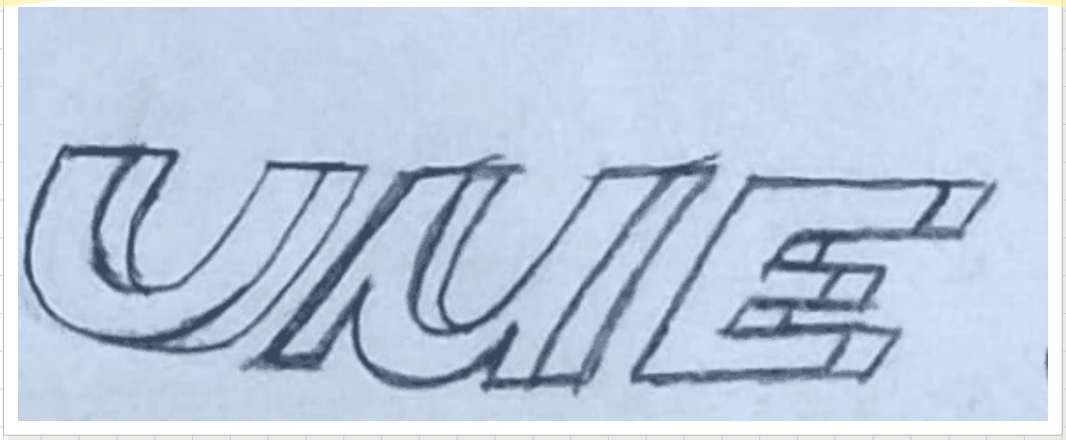
orijinal çizim, s. 32

$$0 \le x \le 2 \qquad 0 \le y \le 3 \qquad 0 \le z \le 4$$

$$m = \int_0^4 \int_0^3 \int_0^2 xyz \, dx\, dy\, dz = 72$$

$$M_{xy} = \int_0^4 \int_0^3 \int_0^2 xyz^2 \, dx\, dy\, dz = 192$$

$$M_{yz} = \int_0^4 \int_0^3 \int_0^2 x^2 yz \, dx\, dy\, dz = 96 \qquad M_{xz} = \int_0^4 \int_0^3 \int_0^2 xy^2 z \, dx\, dy\, dz = 144$$



orijinal çizim, s. 32