Nümerik Analiz

Ders 11 – Lineer cebir denklem sistemleri için iterasyon yöntemleri

Orijinal not: numerik-11.hafta.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

ders 11

Lineer Cebir Denklem sistemleri için iterasyon yöntemleri

1- Matrisin özdeğer ve özvektörleri
2- Jacobi iterasyon yöntemi
3- Gauss-Seidel " "
4- iterasyon yöntemlerinin yakınsaklığı

Matris özdeğer ve özvektörleri, spektral yarıçap

$n \times n$ boyutlu $A = [a_{ij}]$, $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow Ax = \lambda x$

$\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$

$x = 0 \rightarrow$ trivial (aşikar) çözümdür $\rightarrow$ bunu aramıyoruz

$x \neq 0 \rightarrow$ nontrivial " ✓ $\Rightarrow$ özdeğerler $\Rightarrow$ özvektörler

$\det(A - \lambda I) \neq 0 \rightarrow$ trivial

$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow$ nontrivial ✓

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) \rightarrow A$ matrisinin karakteristik polinomudur

$P(\lambda)$'nın sıfırları, özdeğerlerdir.

$$\underbrace{P(\lambda) = 0}_{\lambda \text{ özdeğer}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(A - \lambda I)x = 0}_{x \text{ özvektörler}}$$

Örnek

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad -\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}, \qquad \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

$$(A-\lambda_1 I)x=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}-i & 1\\ -1 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0$$

$$\left.\begin{aligned}-ix_1+x_2&=0\\ -x_1-ix_2&=0\end{aligned}\right\} \boxed{x_2=ix_1} \Rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\ ix_1\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$$

orj. s. 2

λ_2 için $x_1\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$

$$\bar{X}_{1,2}=\begin{bmatrix}1\\ \pm i\end{bmatrix}$$

b) $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\ 1&1&2\\ 1&-1&4\end{bmatrix}$, $A-\lambda I=\begin{bmatrix}2&0&0\\ 1&1&2\\ 1&-1&4\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}$

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\ 1&1-\lambda&2\\ 1&-1&4-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\ -1&4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\underbrace{(2-\lambda)}_{\lambda_1=2}\underbrace{(6-5\lambda+\lambda^2)}_{\lambda_{2,3}=2,3}=0$$

$$\lambda_{1,2}=2 \qquad \lambda_3=3$$

$$(A-\lambda_{1,2}I)x=0 \qquad \begin{bmatrix}0&0&0\\ 1&-1&2\\ 1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$x_1-x_2+2x_3=0 \qquad \Rightarrow x_1=x_2-2x_3$$

$$\begin{bmatrix}x_2-2x_3\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_3 I)x=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}-1&0&0\\ 1&-2&2\\ 1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$\boxed{-x_1=0}$

$x_1-2x_2+2x_3=0 \qquad \Rightarrow x_2=x_3$

$x_1-x_2+x_3=0$

$x_1=0, \quad x_2=x_3,$

orj. s. 3

$$\lambda_3=3 \Rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ x_3\\ x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

A'nın $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ özdeğerinin

$$r(A) = \max\{(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, \ldots, |\lambda_n|)\}$$

1. örnekte $r(A) = 1$
2. örnekte $r(A) = 3$

Yakınsak Matrisler

$n \times n$ boyutlu $A = [a_{ij}]$

$$A^2 = AA, \qquad A^3 = A \cdot A \cdot A$$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k} \longrightarrow [A^k]_{ij} : A^k\text{'nın } i\text{'inci satırı, } j\text{'inci sütunu}$$

Eğer her $i, j = 1, \ldots, n$ $\lim_{k\to\infty} [A^k]_{ij} = 0$ olursa A matrisi yakınsak matristir.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ yakınsak old. gösteriniz

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 \\ \frac{k}{2^{k+1}} & \frac{1}{2^k} \end{bmatrix}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2^{k+1}} = 0$$

$\Longrightarrow$ A yakınsak matristir

orj. s. 4

A matrisinin yakınsak olması için, onun spektral yarıçapının $r(A) < 1$ olması ile gerek ve yeter koşul sağlanmış olur.

2- Jacobi iterasyon yöntemi

$\rightarrow$ $n \times n$ boyutlu $A = [a_{ij}]$ olsun öyle ki: $a_{ii} \neq 0$ $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ bilinmeyen ve $b = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$ sağlandığı için

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}}$$
$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}}$$
$$\vdots$$
$$x_n = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \cdots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_n{}^{1} + \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j\right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

denklem sistemi

denklemlerin çözümü için yaklaşımı (iteratif yöntem)

$$x^{(0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i\right]$$
$$i = 1,2,\ldots,n$$

orj. s. 5

Örnek 3

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0$$
$$3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0$$

denklem sistemi için $x^{(0)} = 0$ olacak biçimde Jacobi iterasyonu uygulayıp 2 iterasyonu bulunuz.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &= \tfrac{1}{3} \\ \tfrac{3}{6}x_1 + x_2 + \tfrac{2}{6}x_3 &= 0 \\ \tfrac{3}{7}x_1 + \tfrac{3}{7}x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x_1^{(k)} &= \tfrac{1}{3}x_2^{(k-1)} - \tfrac{1}{3}x_3^{(k-1)} + \tfrac{1}{3} \\ x_2^{(k)} &= -\tfrac{1}{2}x_1^{(k-1)} - \tfrac{1}{3}x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} &= -\tfrac{3}{7}x_1^{(k-1)} - \tfrac{3}{7}x_2^{(k-1)} \end{aligned}$$

$$x^{(0)} = [0,\ 0,\ 0]^T$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1^{(1)} &= \tfrac{1}{3} \\ x_2^{(1)} &= 0 \\ x_3^{(1)} &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \begin{aligned} x_1^{(2)} &= \tfrac{1}{3} \\ x_2^{(2)} &= -\tfrac{1}{6} \\ x_3^{(2)} &= -\tfrac{1}{7} \end{aligned}$$

[1] Claude notu: muhtemelen x_{n-1} olmalı.

orj. s. 6

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{L} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad A = L + D + U$$

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; (L + D + U)x = b$$

$$Dx = -(L + U)x + b$$

$$x = \underbrace{-D^{-1}(L + U)}\, x + D^{-1}b$$

$$\Downarrow$$

$$x = T_J x + c_J$$

$$T_J = -D^{-1}(L + U)$$

$$c_J = D^{-1}b$$

$$x^{(k)} = T_J x^{(k-1)} + c_J$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_J = -\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \end{bmatrix} \qquad c_J = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

orj. s. 7

3. Gauss-Seidel iterasyon yöntemi

→ $n \times n$ boyutlu $A = [a_{ij}]$ olsun öyle ki $a_{ii} \neq 0$

$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ bilinmeyeni ve $b = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$ sağ tarafı için

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[-\underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}_{?\,k\text{ öğene}} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j + b_i\right]$$

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i\right]$$

$$i = 1,2,\ldots,n$$

Gauss-Seidel ?formülü

$$(L + D)x = -Ux + b$$

$$x = (L + D)^{-1}Ux^{2} + (L + D)^{-1}b$$

$$\det(L + D) \neq 0$$

$$T_g = -(L + D)^{-1}U$$

$$c_g = (L + D)^{-1}b$$

$$x = T_g x + c_g$$

$$x^{(0)} = 0$$

$$x^{(k)} = T_g x^{(k-1)} + c_g$$

$$k = 1,2,\ldots$$

Örnek

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0$$
$$3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4$$

denklem sistemini $x^{(0)} = 0$ olacak biçimde Gauss-Seidel yöntemi uygulayarak ilk iki iterasyonunu bulunuz.

orj. s. 8

köşegen elemanını yalnız bırakıp normalize ederiz (genlik = 1)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{2}{3}x_3 \\ x_3 = -\frac{3}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_2 + \frac{4}{7} \end{cases}$$

köşegene kadar k, köşegenden sonra $(k-1)$ iterasyonları belirledik

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{3}x_2^{(k-1)} - \frac{1}{3}x_3^{(k-1)} + \frac{1}{3} \\ x_2^{(k)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k)} - \frac{2}{3}x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = -\frac{3}{7}x_1^{(k)} - \frac{3}{7}x_2^{(k)} + \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{3}$$

$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(1)} = -\frac{1}{6}$$

$$x_3^{(1)} = -\frac{3}{7}x_1^{(1)} - \frac{3}{7}x_2^{(1)} + \frac{4}{7} = \frac{1}{2}$$

[2] Claude notu: muhtemelen $x = -(L + D)^{-1}Ux + (L + D)^{-1}b$ olmalı (aşağıdaki T_g ile uyumlu).

$k = 2$ olursa

$$x_1^{(2)} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = +\frac{1}{3}$$[3]
$$x_2^{(2)} = -\frac{1}{2}x_1^{(2)} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$x_3^{(2)} = -\frac{3}{7}x_1^{(2)} - \frac{3}{7}x_2^{(2)} + \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$$

orj. s. 9

$$x^{(k)} = T_g x^{(k-1)} + c_g \qquad T_g = -(L+D)^{-1}U \qquad c_g = (L+D)^{-1}b$$

$$T_g: \quad x_1 = \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}x_3 = -\frac{1}{6}x_2 \; ? -\frac{3}{6}x_3 - \frac{1}{6}$$
$$x_3 = -\frac{3}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_2 + \frac{4}{7}$$
$$= -\frac{1}{14}x_2 + \frac{5}{14}x_3 + \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} \end{bmatrix}}_{T_g \text{ matrisi}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c \qquad k = 1,2$$

Teorem

Her $x^{(0)}$ başlangıç yaklaşımı için $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$, $k = 1,2,\ldots$ iterasyonuyla belirlenmiş $x^{(k)}$, $k = 0,1,\ldots$ dizisinin $x = Tx + c$ denkleminin çözümüne yakınsaması için gerek ve yeter koşul $r(T) < 1$ eşitsizliğinin sağlanmalıdır.

$$2x_1 - x_2 + x_3 = -1$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = -5$$

T_J, T_g belirleyin ve yakınsaklığını inceleyin

$$T_J = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}i \\ \lambda_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}i \end{array}\right\} \; r(T_J) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$$

$$T_g = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & & \end{bmatrix}$$[4]

[3] Claude notu: yukarıdaki formüle göre muhtemelen $x_1^{(2)} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ olmalı.

[4] Claude notu: notta T_g matrisi yarım bırakılmış (son satır yazılmamış).