Nümerik Analiz

2. Ders – Tek değişkenli fonksiyonlar ve kök bulma yöntemleri

Orijinal not: numerik-2.ders.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

2. ders

Tek değişkenli fonksiyonlar ve kök bulma yöntemleri

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} ; \qquad f(x) = 0$$

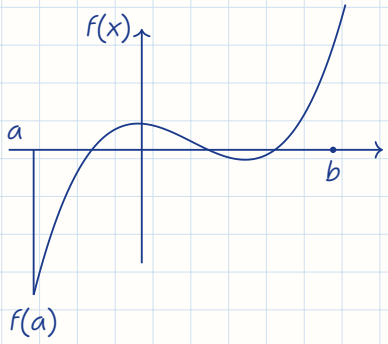
1) İkiye bölme

"Ara değer Teo."

$f \in C[a,b]$ $\quad f(a)\cdot f(b) < 0$

en az bir sıfır $\to f(p) = 0$ $\quad p \in (a,b)$

$x = p$ kök



$a_1 = a \qquad b_1 = b \qquad p_1 = a_1 + \dfrac{b_1 - a_1}{2} = \dfrac{a_1 + b_1}{2} \qquad f(p_1) = 0 \Rightarrow p = p_1$

$f(p_1) \neq 0$ $\quad f(p_1), f(a), f(b)$ işaret karşılaştır

$$\underbrace{f(p_1)\cdot f(a)}_{\text{işaretler aynı}} > 0 \Rightarrow p \in (p_1, b_1)$$

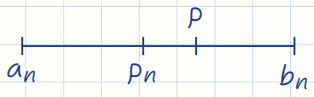
ya da

$$f(p_1)\, f(b) > 0 \Rightarrow p \in (a_1, p_1)$$

$$\hookrightarrow a_2 = a_1, \quad b_2 = p_1 ; \qquad p_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

n. adım $\rightarrow [a_n, b_n] \rightarrow f(a_n)\cdot f(b_n) < 0 \quad p \in [a_n, b_n]$

$$p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$



Örnek 1

orj. s. 2

$[1,2]$ $f(x) = x^3 - x - 1$ verilmiş olsun

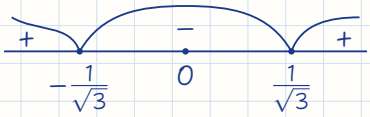
a) $f(x) = 0$ denkleminin tek kökünün mevcut olduğunu gösteriniz

b) İkiye bölme yöntemiyle 3 iterasyon ilerletiniz

a) $f(1) = -1 < 0$; $f(2) = 5 > 0$: $f(1)f(2) < 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} ; \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$f(x)$ monoton $\rightarrow$ 1 kökü var

$f'(-1) > 0$ $f'(0) = -1$ $f'(1) > 0$

b) $a_1 = 1$ $b_1 = 2$ $p_1 = \frac{3}{2}$ $\underbrace{f(p_1)}_{0,875} \neq 0$ $f(p_1), f(a), f(b)$ $0,875 > 0$

$$a_2 = a_1 = 1, \quad b_2 = p_1 = \frac{3}{2} ; \quad p_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{5}{4}$$

$$f(p_2) = -0,2969 < 0$$

$$\downarrow$$

$$f(p_2)\,f(b_1) < 0$$

$$a_3 = p_2 = \frac{5}{4} ; \quad b_3 = b_2 = \frac{3}{2}, \quad p_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{11}{8}$$

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	1	2	3/2	0,875
2	1	3/2	5/4	−0,2969
3	5/4	3/2	11/8	

Teorem 1

orj. s. 3

$f \in C[a,b]$ ve $f(a)\cdot f(b) < 0$ olsun. Bu durumda İBY ile elde edilen p_n, $n = 1,2,\ldots$ iterasyonları, $f(x) = 0$ denkleminin köküne yaklaşır ve bu yaklaşımın mutlak hatası

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n} \qquad n \geq 1$$

İspat

$$n \geq 1 \text{ için } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \quad \text{ve } p_n \in (a_n, b_n)$$

$$p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$|p_n - p| \le \frac{b_n - a_n}{2}$$

$$p_n \to p \qquad n \to \infty$$

Örnek 2

10^{-3} düzeyde doğrulukla kökü kaç iterasyonda bulunur

$$|p_n - p| \le \frac{b-a}{2^n} < 10^{-3}$$

$$\frac{1}{2^n} < 10^{-3}$$

$$\log \frac{1}{2^n} < \log 10^{-3}$$

$$-n \log 2 < -3$$

$$n > \frac{3}{\log 2} \cong 9{,}9658 \qquad n = 10$$

orj. s. 4

Sabit nokta (fixed point iteration)

$$f(x) = g(x) - x = 0 \quad \text{olsun}$$

$$g(x) = x$$

Tanım

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$g(p) = p$$

olacak biçimde bir $p \in [a,b]$ sayısı bulunuyorsa p'ye $g(x)$ fonksiyonun sabit noktası denir.

Bir $p_0 \in [a,b]$ sayısı alalım başlangıç iterasyonu olarak

$$p_n = g(p_{n-1}) \qquad n = 1,2,\dots$$

Böyle bir p_n dizisine sabit nokta iterasyonu denir.

Örnek 3

$g(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4x} + 1$ $p_0 = 1$ olmak üzere sabit nokta iterasyon ile p_2'yi bulunuz.

$$p_n = g(p_{n-1}) \qquad n = 1,2$$

$$p_n = \frac{p_{n-1}}{2} - \frac{1}{4p_{n-1}} + 1$$

$$p_1 = \frac{p_0}{2} - \frac{1}{4p_0} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$p_2 = \frac{p_1}{2} - \frac{1}{4p_1} + 1 = \frac{5}{8} - \frac{1}{5} + 1 = \frac{57}{40}$$

Teorem 2 – Sabit nokta teoremi

$g \in C[a,b]$ verilmiş olsun

1) Eğer her $x \in [a,b]$ için $g(x) \in [a,b]$ oluyorsa g fonksiyonun $[a,b]$'de en az bir adet sabit noktası vardır

1) ve 2) Eğer g fonksiyonun (a,b) aralığında türevi varsa ve her $x \in (a,b)$ için $|g'(x)| \le k$ olacak şekilde bir $0 < k < 1$ bir k bulunabiliyorsa o halde, g fonksiyonun $[a,b]$ aralığında sabit noktası tektir.

orj. s. 5

1), 2) ve 3) Her $p_0 \in [a,b]$ başlangıç iterasyonu için $p_n = g(p_{n-1})$, $n = 1,2,\dots$ SNİ g fonksiyonunun $p \in [a,b]$ sabit noktasına yakınsak olur.

İspat $g(x) \in C[a,b]$ 1 ve 2 sağlanmak üzere $g(p) = p$

$p_n = g(p_{n-1})$ SNİ için ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

$$\begin{aligned} p_n - p &= g(p_{n-1}) - g(p) = g'(\xi_n)\,(p_{n-1} - p) \qquad \xi_n \in (a,b) \\ |p_n - p| &= |g'(\xi_n)|\,|p_{n-1} - p| \le k\,|p_{n-1} - p| \\ &\le k\,k\,|p_{n-2} - p| \le k^3\,|p_{n-3} - p| \le \dots \\ &\le k^n\,|p_0 - p| \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} k^n \to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} |p_n - p| = 0 \qquad p_n \to p$$

Örnek 4

$[1,2]$'de verilmiş $g(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4x} + 1$ fonksiyonun sabit noktasının tek olduğunu gösteriniz.

$g(1) = \frac{5}{4} > 1$

$g(2) = \frac{15}{8} < 2$

$+\ g'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4x^2} \neq 0$

kritik (ekstremum) nokta yok

$\forall x \in [1,2]$ için $g(x) \in [1,2]$ 1) ✓ en az 1 sabit nokta

2) $g'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4x^2}$; $x \in [1,2]$ ✓ tek sabit nokta

$$|g'(x)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$$

orj. s. 6

Özet Sonuç!

Teorem 2'nin koşulları sağlandığında p_n SNİ'nin p sabit noktasına yaklaşımındaki hata

$$|p_n - p| \le k^n \cdot \max\{p_0 - a,\ b - p_0\}$$

Soru $|p_n - p| \le 10^{-4}$ olması için ne gerekiyor?

$$|p_n - p| \le k^n \max\{\underbrace{p_0 - a}_{0},\ \underbrace{b - p_0}_{1}\} = k^n < 10^{-4}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n < 10^{-4}$$

$$n > \frac{4}{\log 4 - \log 3} \cong 32{,}0157$$

yani sağlayan $n = 33$'tür

orj. s. 7

Uygulama 2

Örnek 1

$[0,1]$ aralığında $f(x) = \sqrt{x} - \cos(\pi x)$ fonksiyonu verilsin

a) ikiye bölme yöntemi (bisection) uygulayarak p_3 iterasyonunu hesaplayınız

b) yaklaşık çözümün doğruluğunu 10^{-2} olacak şekilde, iterasyon sayısını belirleyiniz

a) $f(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0$ ✓

$f(1) = 1 - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2 > 0$ ✓

$f(0) \cdot f(1) < 0$ şartı sağlanıyorsa

I) $a_1 = 0$ ve $b_1 = 1$ olsun. Bu durumda

$$p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1}{2} \text{ olur}$$

$$\underset{a_1}{-} \qquad \underset{p_1}{+} \qquad \underset{b_1}{+}$$

$$f(p_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}70710678 > 0$$

II) $f(0) \cdot f(p_1) = (-1)(0{,}707) < 0$

$a_2 = 0 \quad b_2 = \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda

$$p_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1}{4}$$

$$f(p_2) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}20710678$$

$$\underset{a_2}{-} \qquad \underset{p_2}{-} \qquad \underset{b_2}{+}$$

$$f(p_2) \cdot f(b_2) < 0$$

$$a_3 = \frac{1}{4} \qquad b_3 = \frac{1}{2}$$

$$p_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{3}{8}$$

$$f(p_3) = f\left(\frac{3}{8}\right) = \sqrt{\frac{3}{8}} - \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

n	a_n	b_n	$f(p_n)$
1	0	1	0,7071067811
2	0	1/2	−0,20710678118
3	1/4	1/2	0,22968900333070463
4	0,25	0,375	0,0034467613553451626
5	0,25	0,3125	−0,1040631982737 35
6	0,281250	0,3125	−0,05083693654984922
7	0,2968?75	0,3125	−0,23823137275549661
8	0,3046875	0,3125	−0,010219659701388939
9	0,308594	0,3125	−0,0033942480683670784
10	0,310547	0,3125	$2{,}431563856108987 \cdot 10^{-5}$

orj. s. 8

b) $\left.\begin{aligned} f(0) &= -1 < 0 \\ f(1) &= 2 > 0 \end{aligned}\right\}$ olduğuna göre $f(x) = 0$ denkleminin bir $p \in (0,1)$ kökü vardır.

p_n, $n = 1,2,\ldots$ dizisi için

$$|p_n - p| \le \frac{b-a}{2^n} < 10^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-2} \Rightarrow \log_{10}\frac{1}{2^n} < \log_{10} 10^{-2}$$

$$\log_{10} 2^{-n} < -2$$

$$\Rightarrow -n \log_{10} 2 < -2$$

$$n > \frac{2}{\log 2} \approx 6{,}64385\ldots$$

$$n = 7$$

$$\frac{b-a}{2^n} = t$$

$$\frac{1}{2^n} = \frac{t}{b-a}$$

$$-n \log_{10} 2 = \log_{10}\left(\frac{t}{b-a}\right)$$

$$-n = \log\left(\frac{t}{b-a} \div 2\right)^2$$

$$n = -\log\left(\frac{t}{2(b-a)}\right)$$

orj. s. 9

"bisection root finder" root calculator

Örnek 2. soru

$[0,2\pi]$ aralığında $g(x) = \pi + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ fonksiyonu veriliyor

a) $g(x)$'in en az bir sabit noktası olduğunu gösterin
b) Bu sabit noktanın tek olduğunu gösterin
c) $p_0 = \pi$ olarak hatanın 10^{-2} olacak şekilde gereken iterasyon sayısını belirleyiniz
d) Bu sayıya göre iterasyonu bulun

a) $g(0) = \pi + \frac{1}{2}\sin(0) = \pi > 0$

$g(2\pi) = \pi + \frac{1}{2}\sin(\pi) = \pi < 2\pi$

en az bir sabit nokta vardır

b) $g'(x) = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$$|g'(x)| \le \frac{1}{4}$$

$0 < \frac{1}{4} < 1$ aralığında olduğunda bu sabit nokta tektir.

c) $p_0 = \pi$

[1] Claude notu: muhtemelen −0,0238231372… olmalı (bir sıfır eksik).
[2] Claude notu: muhtemelen $-n = \log\left(\frac{t}{b-a}\right) / \log 2$ olmalı.

$a = 0,\ b = 2\pi$

$$|p_n - p| \le k^n \underbrace{\max\{p_0 - a,\ b - p_0\}}_{\pi} \le 10^{-2}$$

$k = \frac{1}{4}$ idi (b şıkkında)

$$\pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n < 10^{-2} \Rightarrow \log_{10}\left[\pi\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] < \log_{10} 10^{-2}$$

$$\log\pi + n\log\frac{1}{4} = \log\pi - n\log 4 < -2$$

$$n > \frac{2 + \log\pi}{\log 4} \approx 4{,}14767$$

$$n = 5$$

orj. s. 10

ödev

d) $p_n = g(p_{n-1})$

$$p_1 = g(p_0) = \pi + \tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 3{,}641592$$

$$p_2 = g(p_1) = 3{,}6260488$$

$$p_3 = g(p_2) = 3{,}62699562$$

$$p_4 = g(p_3) = 3{,}626938$$

Çözüm:

$$p_n = g(p_{n-1}) \qquad p_0 = \pi \qquad g(x) = \pi + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$p_1 = g(p_0) = \pi + \tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 3{,}641592654$$

$$p_2 = g(p_1) = \pi + \tfrac{1}{2}\sin\left(\frac{3{,}641592654}{2}\right) = 3{,}626048864$$

$$p_3 = g(p_2) = \pi + \tfrac{1}{2}\sin(3{,}626048864) = 3{,}626995622$$

$$p_4 = g(p_3) = \pi + \tfrac{1}{2}\sin(3{,}626995622)$$

$$p_4 = 3{,}626942208^{3}$$

[3] Claude notu: p_3 ve p_4 satırlarında sin içinde /2 kastedilmiş; $p_4 \approx 3{,}626938794$ olmalı (yukarıdaki 3,626938 ile uyumlu). 3,626942208 değeri p_5'e karşılık geliyor.