Nümerik Analiz

3. Ders – Kök bulma yöntemleri (devamı): Newton, sekant ve hata analizi

Orijinal not: numerik-3.ders.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

3. ders

Kök bulma yöntemleri – devamı

Newton (Newton-Raphson) yöntemi

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ için $f(x) = 0$, $x = p$ kökünü sayısal olarak bulalım

$f \in C^2[a,b]$ ve $p_0 \in [a,b]$ bir nokta

$f'(p_0) \neq 0$ ve $|p - p_0|$ küçük bir büyüklük

lineer taylor polinomu =

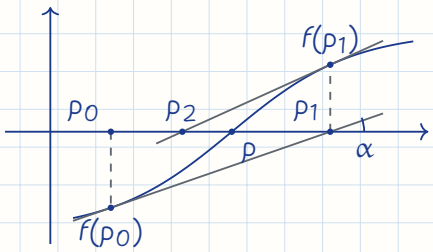
$$f(x) = f(p_0) + f'(p_0)(x - p_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - p_0)^2 \qquad (p - p_0)^2 \cong 0$$

$$0 = f(p_0) + f'(p_0)(p - p_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(p - p_0)^2$$

$$p \cong p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} = p_1$$

p_n, $n = 1,2,\ldots$

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \qquad n = 1,2,\ldots$$



$\tan\alpha = f'(p_0)$

$\tan(\pi - \alpha) = -f'(p_0) \neq 0$

Örnek

$[0, \pi/2]$ $f(x) = \cos x - x$ $f(x) = 0$ denkleminin kökünü

a) $p_0 = \frac{\pi}{2}$ alıp sabit nokta iterasyonuyla p_6'yı

b) $p_0 = \frac{\pi}{2}$ Newton ile $n = 1,2,3$ uygulayarak p_3'ü bulunuz

$$\cos x - x = 0$$

$$g(x) = \cos x = x$$

a) $g(x) = \cos x \qquad p_n = g(p_{n-1}) \qquad n = 1,2,\ldots$

$p_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad p_2 = \cos(0) = 1, \quad p_3 = \cos(1) \cong 0{,}540302$
$p_4 = \cos(p_3) \cong 0{,}8575532, \quad p_5 = \cos(p_4) \cong 0{,}6542898$
$p_6 = \cos(p_5) \cong 0{,}7934805$

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\cos(p_{n-1}) - p_{n-1}}{-\sin(p_{n-1}) - 1} = p_{n-1} + \frac{\cos p_{n-1} - p_{n-1}}{\sin p_{n-1} + 1}$$

orj. s. 2

b)

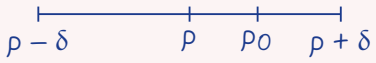
$$p_1 = p_0 + \frac{\cos p_0 - p_0}{\sin p_0 + 1} = \frac{\pi}{2} + \frac{-\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$p_2 = p_1 + \frac{\cos p_1 - p_1}{\sin p_1 + 1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \cong 0{,}7395361$$

$$p_3 = p_2 + \frac{\cos p_2 - p_2}{\sin p_2 + 1} \cong 0{,}7956852^{1}$$

Teorem 1

$f \in C^2[a,b]$, Eğer $p \in [a,b]$ noktasında $f(p) = 0$ ve $f'(p) \neq 0$ olursa o halde öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, Newton iterasyonu her $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$ başlangıç iterasyonu için p sayısına yakınsar.



Sekant yöntemi

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \to p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}} \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}}$$

p_{n-2} çok yakın p_{n-1}

$$= \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$$

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}, \qquad n = 2,3,\ldots$$

Örnek 2

p_0 ve p_1 başlangıç iterasyonlarına gereksinim duyuyor!

$f(x) = x^2 - 6$

a) $p_0 = 1 \rightarrow p_2$'yi Newton Y. ile bulun
b) $p_0 = 3, p_1 = 2$; p_3'ü Sekant y. ile bulun

$$f'(x) = 2x$$

[1] Claude notu: muhtemelen $p_3 \cong 0{,}7390852$ olmalı.

a) NI: $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^2 - 6}{2p_{n-1}} \qquad n = 1,2,\dots$

$$p_1 = p_0 - \frac{p_0^2-6}{2p_0} = 1 - \frac{1-6}{2} = \frac{7}{2}; \qquad p_2 = \frac{7}{2} - \frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 6}{2\cdot\frac{7}{2}} = \frac{73}{28} \cong 2{,}607143$$

b) Sekant yöntemi

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1}^2-6)(p_{n-1}-p_{n-2})}{p_{n-1}^2 - p_{n-2}^2}$$

$$= p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^2-6}{p_{n-1}+p_{n-2}}$$

orj. s. 3

$$p_2 = \frac{12}{5}$$

$$p_3 = \frac{p_1p_2+6}{p_1+p_2} \cong 2{,}454545$$

İterasyon yöntemlerinde Hata analizi

Tanım

p_n, $n = 1,2,3,\dots$ dizisi $p_n \neq p$ olacak biçimde p'ye yakınsak bir dizi olsun. Eğer;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1}-p|}{|p_n-p|^\alpha} = \lambda$$

olacak şekilde λ ve α sayıları bulunabiliyorsa; p_n, $n = 1,2,3$, dizisi "asimtotik hata sabiti λ olacak biçimde p sayısına α'ıncı dereceden yakınsaktır."

p_n → ikiye bölme, Sekant, Newton

$\alpha = 1$ "Lineer yakınsak"

$\alpha = 2$ "kuadratik yakınsak"

$\alpha = 3$ "kübik " "

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1}|}{|p_n|} = 0{,}5 \quad \text{olsun} \qquad p_n \to 0\text{'a yakınsak}, \; n = 1,2,\dots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|q_{n+1}|}{|q_n|^2} = 0{,}5 \qquad q_n \to 0, \; n = 1,2,\dots$$

$$\frac{|p_{n+1}|}{|p_n|} \approx 0{,}5 \Rightarrow |p_n| \approx 0{,}5\,|p_{n-1}| \approx (0{,}5)^2\,|p_{n-2}| \approx \cdots \approx \boxed{(0{,}5)^n}\,|p_0|$$

$$\frac{|q_{n+1}|}{|q_n|^2} \approx 0{,}5 \Rightarrow |q_n| \approx 0{,}5\,|q_{n-1}|^2 = 0{,}5\left[0{,}5\,|q_{n-2}|^2\right]^2$$

$$\approx (0{,}5)^3\,|q_{n-2}|^4 \approx \cdots \approx \boxed{(0{,}5)^{2^n-1}}\,|q_0|^{2^n}$$

n	$\alpha = 1,\ p_0 = 1$ $p_n = (0{,}5)^n$	$\alpha = 2,\ q_0 = 1$ $q_n = (0{,}5)^{2^n-1}$
1	0,5	0,5
2	0,25	0,125
3	0,125	0,0078125
4	0,0625	0,000030518
5	0,03125	$0{,}46566 \cdot 10^{-9}$
6	0,015625	$0{,}10842 \cdot 10^{-18}$

Örnek

1) $p_n = 10^{-2^n}$ $n = 1,2,\ldots$ dizisi 0'a kuad. yakınsar mı
2) $p_n = 10^{-n^2}$, $n = 1,2$ " " "

1) $$\frac{|p_{n+1}|}{|p_n|^2} = \frac{10^{-2^{n+1}}}{(10^{-2^n})^2} = \frac{10^{-2^{n+1}}}{10^{-2^{n+1}}} = 1$$ yakınsaktır (sabit sayı çıktığından)

2) $$\frac{|p_{n+1}|}{|p_n|^2} = \frac{10^{-(n+1)^2}}{\left(10^{-n^2}\right)^2} = \frac{10^{-(n+1)^2}}{10^{-2n^2}} = 10^{-(n^2+2n+1)+2n^2}$$

$$= 10^{n^2-2n-1} \quad \times \text{ sabit değil}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1}|}{|p_n|^2} \to \infty$$

Teorem 2

$g \in C[a,b]$ ve her $x \in [a,b]$ için $g(x) \in [a,b]$. Ayrıca (a,b)'de g' türevi sürekli mevcut öyle ki; $|g'(x)| \le k$; $k < 1$ biçiminde k mevcut olsun. Eğer $g'(p) \neq 0$ olursa $\to p_0 \in [a,b]$, $p_0 \neq p$ başlangıç iterasyonu için $p_n = g(p_{n-1})$ $n = 1,2,\ldots$ Sabit nokta iterasyonu $p \in [a,b]$ sabit noktasına lineer yakınsar.

İspat Sab. Nokta teor. $\Rightarrow p_n \to p \quad (n \to \infty)$

$$p_{n+1} = g(p_n) \qquad p = g(p) \ \Rightarrow\ p_{n+1} - p = g(p_n) - g(p)$$

ortalama değer teoremi $\Rightarrow$ $= g'(\xi_n)(p_n - p)$

$$\frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = |g'(\xi_n)|$$

$$\to \lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = \lim_{n\to\infty} |g'(\xi_n)| = |g'(p)| \neq 0$$

Teorem 3

p sayısı $x = g(x)$ denkleminin çözümü olsun. Ayrıca $g'(p) = 0$ ve p'yi içeren bir I aralığında sürekli g'' türevi mevcut olsun öyleki $|g''(x)| < M$ sağlansın. Bu durumda öyle bir $\delta > 0$ sayısı mevcut olurki, her $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ başlangıç iterasyonu için $p_n = g(p_{n-1})$ iterasyonu p'ye quadratik yakınsak. Ayrıca keyfi büyük n sayılar için, $|p_{n+1} - p| < \frac{M}{2}|p_n - p|^2$ sağlanır.

$$\boxed{\begin{aligned} g(p) &= p \\ g'(p) &= 0 \end{aligned}}$$

orj. s. 5

$$f(x) = 0 \iff g(x) = x - \varphi(x) f(x)$$

$\varphi(p) \neq 0$
sonradan belirlenebilir fonksiyon.

$p_n = g(p_{n-1})$, $n = 1,2,3,\ldots$ köke (sabit n.) kuvadratik yakınsaması için;

$g(p) = p \iff f(p) = 0$ ve $g'(p) = 0$ olması gerekiyor

$$g'(x) = 1 - \varphi'(x) \underbrace{f(x)}_{\to 0} - f'(x)\varphi(x)$$

$$x = p \;\to\; 0 = 1 - \varphi'(p) \underbrace{f(p)}_{=0} - f'(p)\varphi(p) = 1 - f'(p)\varphi(p)$$

$$\Rightarrow \varphi(p) = \frac{1}{f'(p)}$$

BASİT SIFIR △

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \;\to\; p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

Özet Sonuç

$f(p) = 0$ ve $f'(p) \neq 0$ oldukça newton iterasyonu enaz kuadratik yakınsak.

Tanım

$f \in C^n[a,b]$ $p \in (a,b)$ noktası için

$$f(p) = f'(p) = f''(p) = \cdots = f^{(m-1)}(p) = 0\,, \quad f^{(m)}(p) \neq 0$$

p sayısı $f(x)$'in m katlı sıfırıdır

Örnek

$x = 0$ sayısı $f(x) = x^3 - x^4$ fonksiyonunun 3 katlı sıfırıdır

çünkü $f(0) = 0$, $f'(0) = 3(0)^2 - 4(0)^3 = 0$; $f''(0) = 6(0) - ?12(0)^2 = 0$

$f'''(0) = 6 - 24(0) = 6 \neq 0$

Örnek 4

$f(x) = e^x - x - 1$ için

a) $x = 0$'ın $f(x)$'in 2 katlı sıfırı olduğunu göst.

b) $p_0 = 1$ alarak, Newton yöntemi gereği oluşturulan iterasyon yakınsaktır fakat kuvadratik değildir. görün

a) $f'(x) = e^x - 1$, $f''(x) = e^x$, $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1 \neq 0$

b)

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}\,, \quad n = 1,2,\ldots \qquad e^{p_n} \cong 1 + p_n + \frac{p_n^2}{2!} + \frac{p_n^3}{3!} + \ldots$$

$$= p_{n-1} - \frac{e^{p_{n-1}} - p_{n-1} - 1}{e^{p_{n-1}} - 1} \qquad n = 1,2,\ldots$$

$p_1 \cong 0{,}58198$
$p_2 \cong 0{,}31906$
$p_3 \cong 0{,}16800$
$p_4 \cong 0{,}08635$

$$\frac{|p_{n+1}|}{|p_n|} = \frac{\left|p_n - \dfrac{e^{p_n} - p_n - 1}{e^{p_n} - 1}\right|}{|p_n|^2} \cong \frac{\left|p_n - \dfrac{\frac{p_n^2}{2} + \dots}{p_n + \dots}\right|}{|p_n|^2} \cong \frac{\left|1 - \dfrac{\frac{1}{2} + \dots}{1 + \dots}\right|}{p_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \dots \to \infty$$

Uygulama 3

Örnek 1

$f(x) = -x^3 - \cos x$ fonksiyonu verilsin

a) $p_0 = -1$ alınarak ve Newton yöntemi kullanarak p_2'yi hesaplayın. $p_0 = 0$ olabilir mi?

$$f'(x) = -3x^2 + \sin x$$

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

$$p_1 = p_0 + \frac{p_0^3 + \cos(p_0)}{-3(p_0)^2 + \sin(p_0)}$$

$$p_1 = -1 + \frac{-1 + 0{,}540302}{-3 - 0{,}841470}$$

$$\boxed{p_1 = -0{,}88032}$$

$$p_2 = p_1 + \frac{(p_1)^3 + \cos(p_1)}{-3(p_1)^2 + \sin(p_1)} = -0{,}865684$$

step	p_n	$f(p_n)$	p_{n+1}	$f(p_{n+1})$
1	−1	0,459698	−0,88033	0,045351
2	−0,88033	0,045351	−0,865684	0,000632
3	−0,865684	0,000632	−0,865474	0,000000...
4	−0,865474	0,000000	−0,8654?74	0,000000

b) $p_0 = -1$, $p_1 = 0$ alınarak sekant yöntemi kullanarak p_3'ü hesaplayınız

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})\,(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

$p_2 = 0{,}685073$[2]
$p_3 = -1{,}252076$

⚠ Dikkat!
sekant yöntemi ile $p_{?4}$ hesap edin

[2] Claude notu: muhtemelen $p_2 = -0{,}685073$ olmalı (eksi işareti eksik).