Nümerik Analiz

7. Ders – Nümerik Diferansiyelleme

Orijinal not: Numerik-7.ders.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

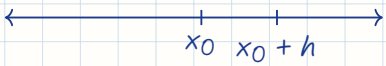
NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

Nümerik Diferansiyelleme

iki nokta formülü

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$f \in C^2[a,b]$ bir fonk, $x_0 \in (a,b)$ bir nokta
$x_1 = x_0 + h \in [a,b]$ olacak şekilde bir h alalım.

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$

$$\underbrace{L_{1,0}(x)}_{\frac{x-x_1}{x_0-x_1}} f(x_0) + \underbrace{L_{1,1}(x)}_{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}} f(x_1) = P_1(x)$$

$$P_1(x) = \frac{x-x_0-h}{-h} f(x_0) + \frac{x-x_0}{h} f(x_0+h),$$

$$f(x) = P_1(x) + f''(\xi)(x-x_0)(x-x_0-h)^{1}$$

$$P_1'(x) = \frac{-f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0+h)}{h} \approx f'(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{2(x-x_0)-h}{2} f''(\xi) + \left(\frac{f''(\xi)}{2}\right)'_x (x-x_0)(x-x_0-h)$$

$$f'(x_0) = P_1'(x_0) - \underbrace{\frac{h}{2} f''(\xi)} \qquad x_0 \le \xi \le x_0+h$$

Not 1 $f(x)$'in x_0 noktasından hata terimli Taylor formülü

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2, \quad \xi \in (x_0, x)$$

[1] Claude notu: muhtemelen $\frac{f''(\xi)}{2}$ olmalı (bir sonraki satırda /2 var).

$x = x_0 + h$ yazalım

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0+h-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_0+h-x_0)^2$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)\,h + h^2\,\frac{f''(\xi)}{2} \qquad \xi \in (x_0, x_0+h)$$
$$f'(x) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - h\,\frac{f''(\xi)}{2} \qquad \xi \in (x_0, x_0+h)$$

orj. s. 2

Örnek 1

	x	$f(x)$	$f'(x)$	$f'(x)$ geri
ileri →	0,5	?0,48	0,8	
ileri / geri →	0,6	0,56	1	0,8
geri →	0,7	0,66		1

(Sol kenarda ardışık satırlar arasında "0,1" adım işaretleri.)

geri fark tüm ileri fark formüllerinde $h \Rightarrow -h$ konularak bulunur.

Örnek 2

$f(x) = \ln x$, $x_0 = 1{,}8$ noktasında 1. mertebeden türevi $h = 0{,}01$ olacak biçimde tahmini hesaplayıp hatasını değerlendiriniz.

$$f'(1{,}8) = \frac{f(1{,}8+0{,}01)-f(1{,}8)}{0{,}01} = \frac{\ln(1{,}81)-\ln(1{,}8)}{0{,}01} = 0{,}5540$$

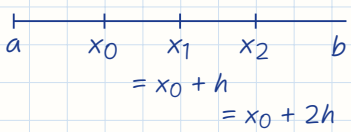
$$R(1{,}8) = -\frac{h}{2}f''(\xi) \qquad \xi \in (1{,}8;\ 1{,}81) \qquad f(x)=\ln x,\ f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$
$$= \left|\frac{h^2}{2}\cdot\frac{1}{\xi^2}\right|^{2} = \left|\frac{0{,}01}{2}\cdot\frac{1}{\xi^2}\right|$$
$$\le \frac{0{,}01}{2}\cdot\frac{1}{(1{,}8)^2} \le 1{,}5\cdot 10^{-3}$$

$$0{,}5525 \le f'(1{,}8) \le 0{,}5555$$
$$\frac{1}{1{,}8} \approx 0{,}5555$$

orj. s. 3

$f \in C^3[a,b]$ ve $x_0 \in (a,b)$, $h \neq 0$ adımı ile
$x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h \in [a,b]$ tanımlansın

$$P_2(x) = L_{2,0}(x)\,f(x_0) + L_{2,1}(x)\,f(x_1) + L_{2,2}(x)\,f(x_2)$$
$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$
$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$



[2] Claude notu: muhtemelen $\frac{h}{2}$ olmalı (hata terimi $-\frac{h}{2}f''(\xi)$; sonraki adımda da $\frac{0{,}01}{2}$ kullanılmış).

$$f(x) = P_2(x) + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$f'(x) = P_2'(x) + \left(\frac{f'''(\xi)}{3!}\right)'_x (x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-2h)$$
$$+ \frac{f'''(\xi)}{6}\Big[(x-x_0-h)(x-x_0-2h) + (x-x_0)(x-x_0-2h)$$
$$+ (x-x_0)(x-x_0-h)\Big]$$

$$P_2'(x) = \frac{2x-(2x_0+3h)}{2h^2} f(x_0) + \frac{2x-(2x_0+2h)}{-h^2} f(x_0+h)$$
$$+ \frac{2x-(2x_0+h)}{2h^2} f(x_0+2h)$$

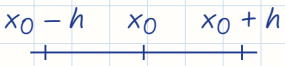
$$\hookrightarrow \quad f'(x_0) = P_2'(x_0) + \frac{f'''(\xi)}{6} 2h^2 \qquad x_0 < \xi < x_0 + 2h$$

3 nokta (üç nokta) formülü

$$\bigstar \quad P_2'(x_0) = \frac{1}{2h}\Big[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\Big] \approx f'(x_0)$$

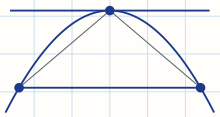
Türevde $x = x_1 = x_0 + h$

$$\left.\begin{aligned} f'(x_0+h) &= P_2'(x_0+h) + \frac{f'''(\xi)}{6}(-h^2) \\ P_2'(x_0+h) &= \frac{1}{2h}\Big[-f(x_0) + f(x_0+2h)\Big] \end{aligned}\right\}$$



$$\swarrow \quad f'(x_0) = \frac{1}{2h}\Big[f(x_0+h) - f(x_0-h)\Big] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

$$x_0 - h < \xi < x_0 + h$$



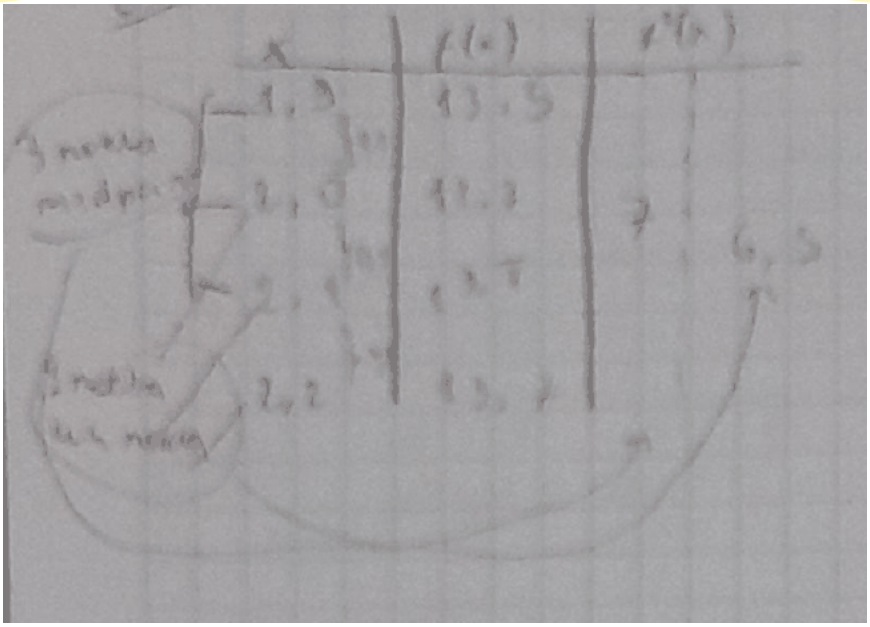
orj. s. 4 (Bu sayfa çok silik kurşun kalemle yazılmış; tablo değerleri zor okunuyor.)

Örnek 3

x	$f(x)$	$f'(x)$
1,9	? 13,5	
2,0	? 11,3	?
2,1	? 13,7	
2,2	? 13,7	

6,5

$f'(x)$: 2,0'daki değeri? tahmin ediniz



orijinal çizim, s. 4

2. mertebeden türev için nümerik diferansiyelleme formülü

$f \in C^4[a,b]$ ve $x_0 \in (a,b)$ verilmiş, $x = x_0$ noktasındaki Taylor formülüne göre

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}h^4$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}h^4$$

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = f'(x_0)\,2h + f'''(\xi)\,2h^3$$

(midpoint'a: $2h$'a bölersek benzer?!)

(Solda "ikisini toplayalım" notu; iki açılımdan aşağıdaki toplama ok.)

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + 2\frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \underbrace{\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}h^4 + \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}h^4}_{\rightarrow\ \frac{f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)}{2} = f^{(4)}(\xi)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\rightarrow \quad f''(x_0) = \frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2} - \underbrace{\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)}_{\text{hata}}$$

orj. s. 5

Örnek 4

$f(x) = xe^x \to f''(2)$'yi tahmin edin ve hatasını belirtin
$h_1 = 0{,}1 \qquad h_2 = 0{,}2$

$$\nearrow\ f'(x) = (1+x)e^x \Rightarrow f''(x) = (2+x)e^x \Rightarrow f'''(x) = (3+x)e^x \Rightarrow f^{(4)}(x) = (4+x)e^x$$

$f(x) = xe^x$

	x	$f(x)$	$f''(x)$	
			$h_1 \downarrow$	$h_2 \downarrow$
$x_0 - h_2$	1,8	10,89		
$x_0 - h_1$	1,9	12,70		
$x_0 =$	2,0	14,78	29	29,5
$x_0 + h_1$	2,1	17,15		
$x_0 + h_2$	2,2	19,85		

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2}$$

$$\text{hata} = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

$$R(2,0) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \qquad 1{,}8 < \xi < 2{,}2$$

$$|R(2,0)| = \left|\frac{(0{,}2)^2}{12}(4+\xi)e^{\xi}\right| \le \frac{1}{30}^{3}(4+2{,}2)e^{2{,}2}$$

$$\approx 0{,}1865$$

$$f''(2) = 29{,}5562$$

orj. s. 6

Uygulama

Örnek 1

$f(x) = x\ln x$ fonksiyonu ve $x_0 = 1$, $x_1 = e$ düğüm noktaları verilsin
a) Hermite polinomunu belirleyiniz
b) Bu polinomu kullanarak $f(2)$'nin tahmini değerini bulunuz ve hata değerlendiriniz

Çözüm: a) $n = 1$ $\quad 2n+1 = 3$. dereceden hermite polinomu

$$f(x) = x\ln x \Rightarrow f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}x = \ln x + 1$$

$$f(x_0) = f(1) = 0, \qquad f(x_1) = f(e) = e\ln e = e$$
$$f'(x_0) = f'(1) = 1$$
$$f'(x_1) = f'(e) = 2$$

$$H_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$
$$H_3'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

[3] Claude notu: muhtemelen $\frac{1}{300}$ olmalı ($\frac{0{,}04}{12} = \frac{1}{300}$; 0,1865 sonucu da buna uyuyor).

$$H_3(x_0) = H_3(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = f(1) = 0$$
$$H_3(x_1) = H_3(e) = a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + a_3 e^3 = e$$
$$H_3'(x_0) = H_3'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = f'(x_0) = 1$$
$$H_3'(x_1) = H_3'(e) = a_1 + 2a_2 e + 3a_3 e^2 = f'(e) = 2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2e & 3e^2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ e \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

$a_0 = -0{,}5103555$ $\quad a_2 = $?0,6007054

$a_1 = -0{,}0348194$ $\quad a_3 = $?−0,0555305

orj. s. 7 (Sağ üst köşede: ?0325+)

Çözüm: b) $f(x) = \underbrace{H_3(x)}_{\text{hermite polinomu}} + \underbrace{R(x)}_{\text{hata terimi}}$

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2$$

$$f(2) \approx H_3(2) = 1{,}3785834$$
$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-1)^2(x-e)^2 \qquad \xi \in (1, e)$$

$$f(x) = x \ln x$$
$$f'(x) = \ln x + 1$$
$$f''(x) = \frac{1}{x}$$
$$f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$R(x) = \frac{2}{24} \cdot \frac{1}{\xi^3}(x-1)^2(x-e)^2$$
$$|R(2)| = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{\xi^3}(2-e)^2$$
$$|R(2)| \le \frac{1}{12}(2-e)^2$$

Örnek 2

[0,2] aralığında doğal sınır koşullarına sahip kübik spline

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3, & 0 \le x \le 1 \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

b, c ve d'yi bulunuz

Çözüm: $S_0(0) = 1$ $\quad \boxed{S_0(1) = 2}$

$\boxed{S_1(1) = 2}$

? doğal sınır koş. $S_0'(1) = S_1'(1)$

$$2 - 3x^2\Big|_{x=1} = b + 2c(x-1) + 3d(x-1)^2$$

$$1 = 2 + b \Rightarrow b = -1$$

$S_0''(1) = S_1''(1)$

$$-6x\Big|_{x=1} = 2c + 6d(x-1)$$

$$-6 = 2c$$

$$c = -3$$

orj. s. 8

bağlanmış sınır koşulu

$f'(0) = f'(2)$ koşulu ile $S_0'(0) = S_1'(2)$

$$2 = \underbrace{b}_{-1} + \underbrace{2c}_{-6} + 3d \qquad (\rightarrow -7)$$

$$d = 3$$

(Altında üstü karalanmış "$-6 = 2c$", "$c = -3$".)

---

b bilgi ? si verilmese

$$S_0''(0) = S_1''(2)$$

$$-6x\Big|_{x=0} = 2c + 6d(x-1)\Big|_{x=2}$$

$$0 = -6 + 6d$$

Soru:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

ileri fark Geri fark

$$f'(1) \approx \frac{f(1{,}2) - f(1)}{0{,}2} = 0{,}65 \qquad f'(1) \approx \frac{f(1) - f(0{,}8)}{0{,}2} = 0{,}5$$

orj. s. 9

b) Üç nokta – son nokta

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}\left[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right] = 0{,}6$$

Üç nokta orta nokta

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}\left[f(x_0+h) - f(x_0-h)\right] = 0{,}6250$$

Üç nokta – ara nokta için hata

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0+h) - f(x_0-h)\right] - \underbrace{\frac{h^2}{6}f'''(\xi)}_{O(h^2)} \qquad x_0 - h < \xi < x_0 + h$$

2) $f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}\left[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)\right]$

$$f''(1) = \frac{1}{0{,}04}\left[f(0{,}8) - 2f(1) + f(1{,}2)\right] = 0{,}25$$