Nümerik Analiz

Ders 9 – Diferansiyel denklemler için sayısal yöntemler: Euler ve yüksek dereceden Taylor yöntemi

Orijinal not: numerik-analiz-9.ders.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

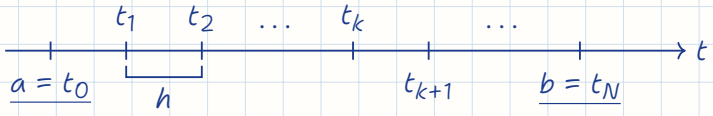
orj. s. 1

Diferansiyel Denklemler için Sayısal Yöntemler

- Euler Yöntemi
- Yüksek dereceden Taylor Yöntemi

Euler Yöntemi

$$\text{var} + \text{tek} \begin{cases} y' = f(t,y), \\ a \le t \le b \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$



N parçaya böl.

Adım ölçüsü: $h = \dfrac{b-a}{N} = t_{k+1} - t_k$

$$t_k = a + kh \qquad k = 0, 1, \ldots, N$$

orj. s. 2

$$y(t_{k+1}) = \overbrace{y(t_k) + h\,y'(t_k)}^{\text{TAHMİNİ}} + \overbrace{\frac{h^2}{2}\,y''(\xi_k)}^{\text{HATA}}$$

$$y'(t_k) = f(t_k, y(t_k))$$

$$y(t_0) = \alpha$$

$$y(t_{k+1}) = \underbrace{y(t_k) + h\,f(t_k, y(t_k))}_{\text{TAHMİN}} + \frac{h^2}{2}\,f'(\xi_k) \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$w_k \approx y(t_k)$$

Örnek

$$\begin{cases} y' = 1 + \dfrac{y}{t}, & 1 \le t \le 2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Bu başlangıç değer prob. çözümünün tahmini değerini adım boyu $h = 0.25$ olacak biçimde belirleyiniz.

Çözüm: $f(t,y) = 1 + \dfrac{y}{t}, \quad a = 1, \; b = 2, \; \alpha = 2, \quad h = \dfrac{b-a}{N} \Rightarrow N = \dfrac{b-a}{h} = 4$

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha = 2 \\ w_{k+1} &= w_k + 0.25\left(1 + \frac{w_k}{t_k}\right) \\ w_{k+1} &= w_k + h\, f(t_k, w_k) \\ k &= 0, 1, \ldots, N-1 \\ &= 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

← Euler yöntemi

$$\begin{aligned} k = 0, \quad w_1 &= w_0 + 0.25\left(1 + \frac{w_0}{t_0}\right) \\ k = 1, \quad w_2 &= w_1 + 0.25\left(1 + \frac{w_1}{t_1}\right) \\ k = 2, \quad w_3 &= w_2 + 0.25\left(1 + \frac{w_2}{t_2}\right) \\ k = 3, \quad w_4 &= w_3 + 0.25\left(1 + \frac{w_3}{t_3}\right) \end{aligned}$$

Tam çözüm: $y' - \dfrac{1}{t}y = 1 \Rightarrow y(t) = 2x + x\ln|x|, \quad y(1) = 2$

orj. s. 3 (Bu sayfa, sayfa 2'deki tahtanın başka bir fotoğrafıdır; içerik aynıdır. Sağdaki panonun kısmen görünen bölümü sayfa 4'te tam olarak aktarılmıştır.)

orj. s. 4 (Soldaki panolar sayfa 2 ile aynı; aşağıda sağdaki pano.)

$$t_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$y \in C^{(2)}[a,b]. \qquad t < \xi_k < t_k$$

$$y(t) = y(t_k) + y'(t_k)(t - t_k) + \frac{y''(\xi_k)}{2!}(t - t_k)^2$$

$$\boxed{t = t_{k+1}}$$

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + y'(t_k)\underbrace{(t_{k+1} - t_k)}_{h} + \frac{y''(\xi_k)}{2}\underbrace{(t_{k+1} - t_k)^2}_{h^2}$$

orj. s. 5 (Aynı tahtanın daha erken bir fotoğrafı; kutuda yalnızca genel Euler formülü var: $w_0 = \alpha$, $w_{k+1} = w_k + h\, f(t_k, w_k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Diğer içerik sayfa 2 ve 4 ile aynı.)

orj. s. 6 (Sayfa 5 ile aynı tahta; yeni içerik yok.)

orj. s. 7 (Aynı tahtanın daha erken bir fotoğrafı; yeni içerik yok.)

orj. s. 8 (Sayfa 1'deki tahta ile sayfa 4'teki Taylor panosunun birlikte fotoğrafı; yeni içerik yok.)

orj. s. 9 (Sağdaki pano: sayfa 1'deki başlık listesi – Diferansiyel Denklemler için Sayısal Yöntemler: Euler Yöntemi, Yüksek dereceden Taylor Yöntemi.)

Yüksek dereceden Taylor Yöntemi

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

Euler yöntemi $y(t_k) = w_k$

$$w_0 = \alpha$$
$$w_{k+1} = w_k + h\, f(t_k, w_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Sürecin lokal kesim hatası, $\boxed{y(t_k) = y_k}$ $k = 0, 1, \ldots, N$

$$\tau_{k+1}(h) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - y'(t_k) = \frac{y''(\xi_k)}{2} h$$

$\boxed{h = t_{k+1} - t_k}$ (Adım ölçüsü), $N = \dfrac{b-a}{h}$

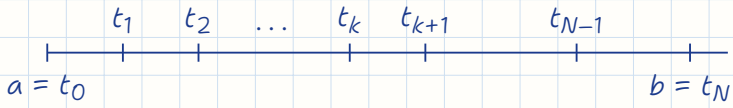
$$\boxed{y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\, y'(t_k) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_k)}$$

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - y'(t_k) = \frac{h}{2} y''(\xi_k) \qquad t_k < \xi_k < t_{k+1}$$

$$y \in C^2[a,b]$$

$$\left| \frac{y''(\xi_k)}{2} \right| \le M$$

$$|\tau_{k+1}(h)| \le \underbrace{M h}_{O(h)}$$



orj. s. 10

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\, y'(t_k) + \frac{h^2}{2} y''(t_k) + \cdots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(t_k) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_k), \qquad t_k \le \xi_k \le t_{k+1}$$

$$y'(t_k) = f(t_k, y_k), \qquad y''(t_k) = \frac{d}{dt} f(t_k, y(t_k))$$

$$y^{(n)}(t_k) = \frac{d^n}{dt^n} f(t_k, y(t_k))^1$$

[1] Claude notu: muhtemelen $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}$ olmalı (bir alt satırdaki açılımda öyle yazılmış).

$$\boxed{w_{k+1}} \approx y(t_{k+1}) = \boxed{y(t_k)} + \Big[h f(t_k, y(t_k)) + \frac{h^2}{2} \frac{d}{dt} f(t_k, y(t_k)) + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t_k, y(t_k)) \Big] \longrightarrow T^{(n)}(t_k, w_k) + \underbrace{\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^n}{dt^n} f(\xi_k, y(\xi_k))}_{\text{HATA}}$$

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{k+1} = w_k + h\, T^{(n)}(t_k, w_k), \qquad k = 0, 1, \dots, N-1$$

(Tahtada $T^{(n)}$'deki (n)'nin üstüne sonradan "2" yazılmış.)

LKH $\longrightarrow$ $|\tau_{k+1}(h)| \le M h^n$ $\qquad O(h^n)$

$n = 2$ durumunda

$$T^{(2)}(t_k, w_k) = f(t_k, w_k) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(t_k, w_k)$$

orj. s. 11

(Sağdaki pano: sayfa 1'deki başlık listesi, tekrar.)

Yüksek dereceden Taylor Yöntemi

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & a \le t \le b \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

Örnek

$$\begin{cases} y' = y - t^2 + 1, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

BDP 2. der. Taylor formülünü adım boyu $h = 0.25$ olarak yaklaşık çözün!

Çözüm: 1) $f(t, y) = y - t^2 + 1$, $\quad a = 0$, $\quad b = 1$, $\quad \alpha = 0.5$

$$\frac{d}{dt} f(t, y(t)) = y' - 2t = y - t^2 - 2t + 1$$

$$N = \frac{b-a}{h} = 4, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4 \qquad (h = 0.25 \to h = \tfrac{1}{4})$$

$$t_k = a + kh = 0.25\, k = \frac{k}{4}$$

$n = 2$ için Taylor formülü

$$w_0 = 0.5$$

$$w_{k+1} = w_k + 0.25\, T^{(2)}(t_k, w_k)$$

orj. s. 12

(Sayfa 10'daki tahta; "n = 2 durumunda" kısmına eklenen satırlar:)

$$T^{(2)}(t_k, w_k) = f(t_k, w_k) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(t_k, w_k)$$

$$= w_k - t_k^2 + 1 + \frac{h}{2} \left(w_k - t_k^2 - 2t_k + 1 \right)$$

$$= w_k \left(1 + \frac{1}{4} \right) - t_k^2 (\dots$$

Son satır tahtada yarım kalmış.[2]

orj. s. 13 (Sayfa 11'deki örneğin tahtası; eklenen kısımlar:)

Çözüm (devam):

$$\boxed{w_0 = 0.5} \qquad w_{k+1} = w_k + 0.25\, T^{(2)}(t_k, w_k)$$

$$w_{k+1} = w_k + \frac{1}{4}\left(\frac{9}{8}\left(w_k - \frac{k^2}{16} + 1\right) - \frac{k}{16}\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

(Bu fotoğrafta hocanın kapattığı son kısım, sayfa 21'deki fotoğraftan alındı.)

$$k = 0 \Rightarrow w_1 = 0.9219$$
$$k = 1 \Rightarrow w_2 = 1.4292$$
$$k = 2 \Rightarrow w_3 = 2.0109$$
$$k = 3 \Rightarrow w_4 = 2.6526$$

orj. s. 14 (Sayfa 11'deki tahtanın daha erken bir fotoğrafı; yeni içerik yok.)

orj. s. 15 (Sayfa 10 ve sayfa 9'daki tahtaların daha erken bir fotoğrafı; yeni içerik yok.)

orj. s. 16 (Sayfa 9'daki tahtanın daha erken bir fotoğrafı; yeni içerik yok.)

orj. s. 17 (Sayfa 10'daki tahtanın başka bir fotoğrafı; yeni içerik yok.)

orj. s. 18 (Sayfa 10 ve 12'deki tahta; $T^{(2)}$ hesabının tamamlanmış hali:)

$$\underline{T^{(2)}(t_k, w_k)} = f(t_k, w_k) + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}f(t_k, w_k)$$
$$= w_k - t_k^2 + 1 + \frac{h}{2}\left(w_k - t_k^2 - 2t_k + 1\right)$$
$$= w_k\left(1 + \frac{1}{8}\right) - t_k^2\left(1 + \frac{1}{8}\right) - t_k\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{9}{8}$$
$$= \frac{9}{8}w_k - \frac{9k^2}{8 \cdot 16} - \frac{k}{16} + \frac{9}{8}$$

orj. s. 19 (Sayfa 11'deki tahtanın daha erken bir fotoğrafı; yeni içerik yok.)

orj. s. 20 (Sayfa 9'daki tahtanın başka bir fotoğrafı; yeni içerik yok.)

orj. s. 21 (Sayfa 11 ve 13'teki örnek tahtasının daha erken bir fotoğrafı: $k = 0 \Rightarrow w_1$, …, $k = 3 \Rightarrow w_4$ satırları henüz değersiz; w_{k+1} ifadesinin sonu "$\cdots - \frac{k}{16}$), $k = 0, 1, 2, 3$" sayfa 13'e işlendi.)

[2] Claude notu: $h/2 = 1/8$ olduğundan muhtemelen $w_k\left(1 + \frac{1}{8}\right)$ olmalı; sayfa 18'de öyle düzeltilmiş.