Nümerik Analiz

11. Hafta – Lineer denklem sistemleri için iterasyon yöntemleri

Orijinal not: numerik-anlaiz-11.hafta-ders-notu-ve-uygulamasi.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

MAT 214

Sayısal Yöntemler

11. Hafta

Lineer Cebri Denklemler Sistemi için İterasyon Yöntemleri.

1) Matrisin öz değer ve öz fonksiyonları;
2) Jacobi iterasyon yöntemi.

orj. s. 2

Lineer Cebri Denklem Sistemleri için İterasyon Yöntemleri

Matrisin özdeğer ve özvektörleri, Spektral Yarıçap.

$n \times n$ boyutlu bir $A = [a_{ij}]$ matrisi verilmiş olsun. Bu matris için, λ reel veya kompleks sayı olmakla

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)x = 0, \qquad I_n \text{ özdeşlik matristir}$$

denklem sistemini inceleyelim. Bu denklem sisteminin açık şekli

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

olur. Kolayca görüldüğü üzere her λ sayısı için $x = 0$ bu sistemin çözümü olur. Bu çözüme aşikar (trivial) çözüm denir. Maksat bu denklem sisteminin trivial olmayan ($x \neq 0$) çözümünü bulmaktır.

λ parametresinin, bu sistemin trivial olmayan çözümlerini temin eden değerlerine özdeğerler, trivial olmayan çözümlere ise özvektörler denir.

Kolayca görüldüğü üzere, eğer $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$ olursa sistemin tek $x = 0$ trivial çözümü olur. Demek ki trivial olmayan çözüme λ'nın $\det(A - \lambda I_n) = 0$ yapan değerleri ile ulaşabiliriz. Başka

deyimle,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)\text{'ye } A \text{ matrisinin karakteristik}$$

orj. s. 3 polinomu dersek, bu polinomun sıfırlarına A matrisinin özdeğerleri denir:

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

denklemlerinin çözümleri A matrisinin özdeğerleridir. Eğer λ sayısı A matrisinin bir özdeğeri ise

$$(A - \lambda I)x = 0$$

sisteminin trivial olmayan ($x \neq 0$) çözümleri bu özdeğere karşı gelen özvektörler olur.

Böylece $n \times n$ boyutlu $A = [a_{ij}]$ matrisinin özdeğer ve özfonksiyonlarını aşağıdaki aşamalarla bulabiliriz:

- $\det(A - \lambda I) = 0$ denklemini çözerek, A matrisinin λ özdeğerleri bulunur;
- λ özdeğer olduğunda

$$(A - \lambda I)x = 0$$

denklem sistemini çözmekle, λ özdeğerine karşı gelen $x \neq 0$ özvektörleri bulunur;

Örnek

Aşağıdaki matrislerin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Çözüm:

a) $$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

orj. s. 4

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$$

A matrisinin iki $\lambda_1 = i$ ve $\lambda_2 = -i$ özdeğerleri vardır.

$$\lambda_1 = i \rightarrow (A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -ix_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - ix_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = ix_1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ ix_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} x_1$$

Böylece, $\lambda_1 = i$ özdeğerine karşı gelen özvektör $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$'dir

$$\lambda_2 = -i \rightarrow (A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ix_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + ix_2 = 0 \end{cases} \rightarrow x_2 = -ix_1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -ix_1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}} x_1$$

$\underline{\lambda_2 = -i}$ özdeğerine karşı gelen özvektör $\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}}$'dir

b) $$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(6 - 5\lambda + \lambda^2) = 0$$

orj. s. 5

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_3 = 3.$$

A matrisinin birisi iki katlı olmakla 2 sayıda $\lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_3 = 3$ özdeğeri vardır.

$$\lambda_{1,2} = 2 \rightarrow (A - \lambda_{1,2} I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 - 3x_3{}^{a}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} x_2 + \underline{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} x_3$$

$\underline{\lambda_{1,2}}$= 2 özdeğerine karşı gelen lineer bağımsız iki tane özvektör

$$\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \text{ ve } \underline{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \text{'dur.}$$

$$\lambda_3 = 3 \rightarrow (A - \lambda_3 I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0^{b}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = x_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} x_2$$

$\lambda_3 = 3$ özdeğerine karşı gelen özvektör $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$'dir.

[a] Claude notu: $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ denkleminden muhtemelen $x_1 = x_2 - 2x_3$ olmalı (bu durumda ikinci özvektör $[-2, 0, 1]^T$ olur).
[b] Claude notu: $A - 3I$ matrisinin ikinci satırı muhtemelen $[1, -2, 2]$ olmalı (ikinci denklem $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$ olurdu; $x_1 = 0$ olduğu için sonuç değişmez).

orj. s. 6

$n \times n$ boyutlu A matrisinin

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$$

özdeğerleri bulunsun.

$$\lambda = a + ib$$
$$|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r(A) = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_m|\},$$

sayısına A matrisinin spektral yarıçap (radius) denir.

Örneğin a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = i$ ve $\lambda_2 = -i$ olduğuna göre $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| = 1$ olduğundan, spektral yarıçap

$$r(A) = \max\{1,1\} = 1 \quad \text{olur.}$$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_{1,2} = 2$ ve $\lambda_3 = 3$ olduğuna göre $|\lambda_{1,2}| = 2$ ve $|\lambda_3| = 3$ olduğuna göre Spektral yarıçap

$$r(A) = \max\{2,3\} = 3 \quad \text{olur.}$$

Yakınsak Matrisler.

$n \times n$ boyutlu $A = [a_{ij}]$ matrisi için

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A \cdot A \cdot A, \ \ldots, \quad A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ kez}}$$ matrisleri düzenleyelim

$[A^k]_{ij}$ ile A^k matrisinin i. satır ve j. sütun elemanını işaretleyelim.

orj. s. 7

Eğer her $i, j = 1,2,..,n$ için

$$\lim_{k \to +\infty} [A^k]_{ij} = 0$$

olursa, diyorlar ki, A matrisi yakınsak matristir

Örnek 2

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ matrisinin yakınsak matris olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \quad \text{vs.}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 \\ \frac{k}{2^{k+1}} & \frac{1}{2^k} \end{bmatrix}$$

Görüldüğü üzere

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2^k} = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{k}{2^{k+1}} = 0$$

$$\Rightarrow A \text{ yakınsak matristir.}$$

A matrisinin yakınsak olması, onun spektral yarıçapının $r(A) < 1$ olması ile gerek ve yeterdir.

orj. s. 8

Lineer Cebri Denklem sistemi için Jacobi iterasyon yöntemi.

$n \times n$ boyutlu $A = [a_{ij}]$ matrisi verilsin, öyle ki, $a_{ii} \neq 0$ olsun. $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$ bilinmeyeni ve $b = [b_1, \ldots, b_n]^T$ sağ tarafı için

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

denklem sisteminin çözümü için ?yaklaşık (iteratif) yöntem verelim.

1. denklemin her tarafına a_{11}, 2. denklemin her tarafına a_{22} ve s. n. denklemin her tarafına a_{nn}'le bölürsek

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}}, \\ x_2 &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}}, \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \cdots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1} + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{aligned}$$

Şeklinde veya kısaca

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j \right) + \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

denklem sistemini elde ederiz.

orj. s. 9

Başlangıç iterasyon olarak

$$x^{(0)} = 0 \qquad \left(x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

alırsak (veya $x^{(0)}$ olarak keyfi bir vektör de alınabilir)

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i \right], \qquad i = 1,2,\ldots,n; \quad k = 1,2,\ldots$$

Şeklinde iterasyon belirleyebiliriz. Bu iterasyona Jacobi iterasyonu denir. k iterasyon adımıdır.

Örnek 3

$$\begin{cases} \boxed{3x_1} - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + \boxed{6x_2} + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + \boxed{7x_3} = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi için $x^0 = 0$ olmakla Jacobi iterasyon yöntemi uygulayarak ilk 2 iterasyonu bulunuz

Çözüm: 1. denklemi 3 ile, 2. denklemi 6 ile ve 3. denklemi 7 ile bölerek sistemi aşağıdaki şekilde yazabiliriz

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{x_1} - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{1}{3} \\ \frac{3}{6}x_1 + \boxed{x_2} + \frac{2}{6}x_3 = 0 \\ \frac{3}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \boxed{x_3} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_3 = -\frac{3}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_2 \end{cases}$$

Şimdi Jacobi iterasyonunu belirleyelim:

orj. s. 10

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{3}x_2^{(k-1)} - \frac{1}{3}x_3^{(k-1)} + \frac{1}{3}, \\ x_2^{(k)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k-1)} - \frac{1}{3}x_3^{(k-1)}, \\ x_3^{(k)} = -\frac{3}{7}x_1^{(k-1)} - \frac{3}{7}x_2^{(k-1)}, \end{cases} \qquad k = 1,2,\ldots$$

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0$$

$k = 1$ olduğunda

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{3}x_2^{(0)} - \frac{1}{3}x_3^{(0)} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ x_2^{(1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(0)} - \frac{1}{3}x_3^{(0)} = 0 \\ x_3^{(1)} = -\frac{3}{7}x_1^{(0)} - \frac{3}{7}x_2^{(0)} = 0 \end{cases}$$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{3}, \quad x_2^{(1)} = 0, \quad x_3^{(1)} = 0$$

$k = 2$ olduğunda

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{3}x_2^{(1)} - \frac{1}{3}x_3^{(1)} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ x_2^{(2)} = -\frac{1}{2}x_1^{(1)} - \frac{1}{3}x_3^{(1)} = -\frac{1}{6} \\ x_3^{(2)} = -\frac{3}{7}x_1^{(1)} - \frac{3}{7}x_2^{(1)} = -\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

Böylece,

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{3}, \quad x_2^{(2)} = -\frac{1}{6}, \quad x_3^{(2)} = -\frac{1}{7}$$

orj. s. 11

Şimdi Jacobi iterasyon formülünü matris-vektör şeklinde verelim. Bunun için A matrisini

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{L\ \text{(alt üçgen)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{D\ \text{(köşegen)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{U\ \text{(üst üçgen)}}$$

$$A = L + D + U$$

Şeklinde yazalım. Bu durumda

$$Ax = b \iff (L + D + U)x = b \implies Dx = -(L + U)x + b$$

olur. $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$ olduğuna göre $\det D \neq 0$ olur ve demek ki, tersi vardır: Her tarafı D^{-1}'le çarparsak

$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b \iff \underline{x = T_J x + c_J}$$

elde edilir. Başlangıç iterasyon olarak $x^0 = 0$ alırsak, bu denklem üzerinden

$$T_J = -D^{-1}(L + U), \qquad c_J = D^{-1}b$$

işaretlersek

$$\boxed{x^{(k)} = T_J x^{(k-1)} + c_J, \quad k = 1,2,\ldots}$$

Şeklinde iterasyon belirleyebiliriz.

T_J matrisine Jacobi matrisi denir.

orj. s. 12

Örneğin bir önceki örnekteki

$$\begin{cases} \boxed{3x_1} - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + \boxed{6x_2} + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + \boxed{7x_3} = 0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b}$$

Sistemi için

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad L + U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan ve $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ olduğu için

$$Ax = b \Leftrightarrow (D + L + U)x = b \Leftrightarrow Dx = -(L + U)x + b$$

$$\Leftrightarrow x = \underbrace{-D^{-1}(L + U)}_{T_J} x + \underbrace{D^{-1}b}_{c_J}$$

$$T_J = -\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Jacobi matrisi $T_J = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \end{bmatrix}$[1] olur.

orj. s. 13

Sorular

1) Aşağıdaki matrislerin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulunuz:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Ayrıca bu matrislerin spektral yarıçaplarını hesaplayınız.

2)

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Sistemini $x^{(0)} = 0$ olmakla Jacobi iterasyonu kullanarak ilk iki iterasyonunu bulunuz. Jacobi matrisini bulunuz.

[1] Claude notu: bir önceki satırdaki çarpıma göre birinci satır muhtemelen $\left[0,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right]$ olmalı.