Nümerik Analiz

1. Ders – Kalkülüs Tekrarı

Orijinal not: Numerik-notlarim-1.ders.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

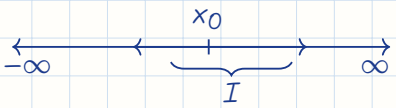
orj. s. 1

Perşembe 10.12

Kalkülüs Tekrarı

süreklilik

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ Reel Sayılar
$I \subset \mathbb{R}$ "Aralık"
$x_0 \in I$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$ $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir

$\forall x_0 \in I$ için sürekli ise $\rightarrow$ I'da sürekli
yani $f \in \underset{\text{continuous}}{C}(I)$; $C[a,b]$, $C(\mathbb{R})$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ varsa $f(x)$'in türevi mevcuttur x_0'da.

$$\exists \lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \rightarrow f \; x_0\text{'da sürekli}$$

türevlenebilir. (tersi doğru değildir)

$f \in C^{(1)}(I)$ $\rightarrow$ birinci türev ile sürekli ise
örnek $C^n(I)$ n'ye kadar
$C^\infty(I)$ her mertebeden

Örnek

$x \in [0,1]$

$f(x) = x^{3/2}$
$f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}$
$f''(x) = \frac{3}{4} x^{-1/2}$

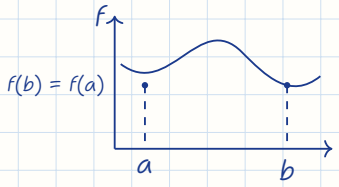
$f \in C^1(I)$
$f \notin C^2(I)$

Teorem 1 (Rolle Teoremi)

$f \in C[a,b]$ $f(a,b)$ türevlenebilir.

$f(a) = f(b) \rightarrow \underset{\text{en az bir}}{\exists} x = c$ ("noktası" üstü çizili)

$\in [a,b] \rightarrow f'(c) = 0$ $f(b) = f(a)$



orj. s. 2

Örnek

$f(x) = 1 - e^x + (e-1)\sin\left(\frac{1}{2}x\right)^*$'in en az bir noktada türevinin 0 olduğunu gösteriniz. $[0,1]$ aralığında

$f \in C^1[0,1]$

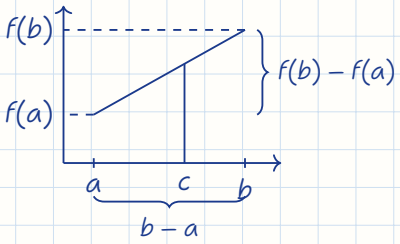
$f(0) = 0, \quad f(1) = 0$ ✓ rolle teoremine göre türevi 0 olan bir nokta vardır

* Claude notu: muhtemelen $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ olmalı ($f(1) = 0$ ancak böyle sağlanır).

Teorem 2 (Ortalama Değer Teoremi)

$f \in C[a,b]$ ve $f(a,b)$ diferansiyellenebilir

$$c \in (a,b) \rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Teorem 3 (Extremum değer Teoremi)

(Extremum: max ve min)

① $f \in C[a,b]$ $c_1, c_2 \in [a,b]$ her $x \in [a,b]$

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

② $f(a,b)$'de türevlenebilirse, $\rightarrow c_1$ ve c_2 noktaları aralığın uç noktaları yada f''nin sıfır olduğu noktalar

Örnek 2

$f(x) = \frac{2 - e^x + 2x}{3}$ $I = [0,1]$ aralığında en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz

Çözüm:

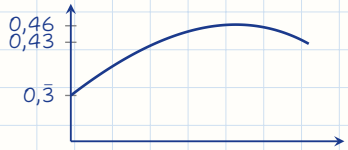
$$f \in C^1[0,1] \rightarrow f'(x) = \frac{-e^x + 2}{3}$$

$$\text{kritik nokta} \Leftarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -e^x + 2 = 0$$

$$e^x = 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln 2} \in [0,1]$$

$$f(0) = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} \simeq 0,\overline{3}, \quad f(1) = \frac{4-e}{3} \simeq 0,43, \quad f(\ln 2) = \frac{2\ln 2}{3} \simeq 0,46$$

f_{min} f_{max}

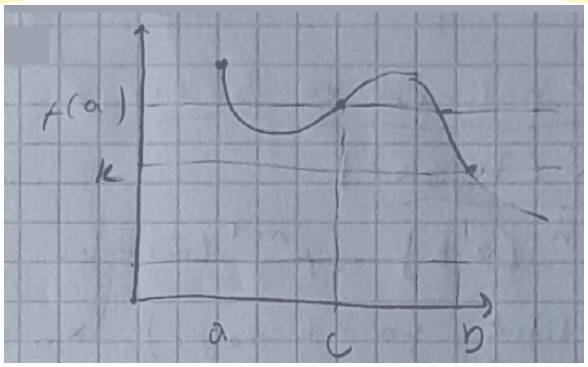


(Örnek 2'nin grafiği)

orj. s. 3

Teorem 4 (Ara değer teoremi)

$f \in C[a,b]$ k $f(a)$ ile $f(b)$ arasında ?keyfi bir sayı o halde öyle $c \in (a,b)$ noktası bulunabilir ki: $f(c) = k$ olur. $k = 0$



orijinal çizim, s. 3

Sonuç: Eğer $f \in C[a,b]$ $f(a) \cdot f(b) < 0$
o halde öyle bir c $\in (a,b)$ bulunur ki $f(c) = 0$ olur.
(en az bir)

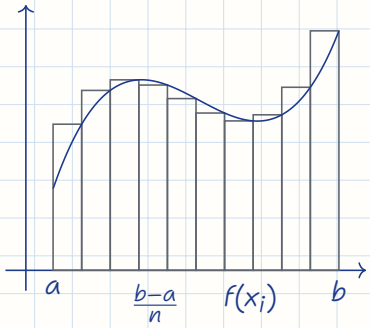
Örnek 3

$(x-2)^2 - \ln(x) = 0$ eşitliğinin $[1,2]$ aralığında en az bir kökünün olduğunu gösteriniz

$$f(1) = 1 > 0, \quad f(2) = -\ln 2 < 0 \qquad f(1) \cdot f(2) < 0$$
$$f(c) = 0$$

Riemann manasında integrallenebilir $\Longleftarrow$ $f \in C[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$



orj. s. 4

Teorem 5 (İntegral için ara değer teoremi)

$f \in C[a,b]$ ve g $[a,b]$ aralığında R.A.İ ve işaret değiştirmez

$$c \in (a,b) \qquad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

Sonuç $\quad g(x) = 1 \rightarrow f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Taylor polinom ve Serisi

Teorem (Taylor)

$f \in C^n[a,b]$, $f^{(n+1)}$ türevi $[a,b]$ aralığında mevcut (süreklilik şart değil) $x_0 \in [a,b]$. Bu durumda, her $x \in [a,b]$ için, x_0 ve x noktaları arasından

$$\xi = \xi(x) \quad \text{bulunabilir ki}$$

$$\underset{\text{verilen fonk.}}{f(x)} = \underset{\text{tahmini değer}}{P_n(x)} + \underset{\text{kesim hatası}}{R_n(x)} \quad \nearrow \; R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

n'inci dereceden taylor polinomu

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$n \to \infty$ $P_n(x)$ limitte Taylor serisini verir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$x_0 = 0$ Mclaurin Serisi

Örnek 4

$f(x) = (1+x)^{1/2}$ fonk için

a) 3. mertebeden T.P

b) $P_3(x) \to f(\sqrt{1,1})$'i tahmin

c) Tahminin hatasını değerlendir

$$f(x) = P_3(x) + R_3(x)$$
$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$
$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 \qquad \xi \in (0,x) \text{ veya } \xi \in (x,0)$$

$$f(x) = (1+x)^{1/2} \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x^{1/2})^{-1/21} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}$$
$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \Rightarrow f'''(0) = \frac{3}{8}$$

orj. s. 5

$\xi \in (0,x)$ veya $\xi \in (x,0)$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(1+x)^{-7/2} \Rightarrow f^{(4)}(\xi) = -\frac{15}{16}(1+\xi)^{-7/2}$$

[1] Claude notu: muhtemelen $\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ olmalı.

o zaman

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$
$$R_3(x) = -\frac{5}{128}(1+\xi)^{-7/2}x^4$$

$f = \sqrt{1{,}1} \Rightarrow x = 0{,}1$

$$P_3 = 1 + \frac{1}{2}(0{,}1) - \frac{1}{8}(0{,}1)^2 + \frac{1}{16}(0{,}1)^3$$
$$= 1 + \frac{1}{20} - \frac{1}{800} + \frac{1}{16000} \cong 1{,}0488125$$

$$R_3(0{,}1) = -\frac{5}{128}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^{7/2}}\cdot\frac{1}{10000}$$
$$|R_3| = |f(0{,}1) - P_3|$$

$$R_3(0{,}1) = -\frac{5}{128}\cdot\frac{1}{(1+\boxed{\xi})^{7/2}}\cdot\frac{1}{10000} \leq$$

↙ 0 veriyoruz en büyük hatayı bulmak için

$$\simeq 3{,}91\cdot 10^{-6}$$

$$P_3(0{,}1) - 3{,}91\cdot 10^{-6} \leq f(0{,}1) \leq P_3(0{,}1) + 3{,}91\cdot 10^{-6}$$
$$1{,}04880859 \leq \underset{\underset{1{,}0488088}{\shortparallel}}{\sqrt{1{,}1}} \leq 1{,}0488164$$

Örnek 5

$f(x) = (1+x)^{1/2}$ $x_0 = 0$ noktasında P_3 ile

$$\int_0^{0{,}1} (1+x)^{1/2}\,dx$$

orj. s. 6

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$
$$\int_0^{0{,}1} P_3(x)\,dx = \int_0^{0{,}1}\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3\right)dx$$
$$= \left[x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{64}\right]_{x=0}^{x=0{,}1} \simeq 0{,}1025$$
$$\int_0^{0{,}1} R_3(x)\,dx = \int_0^{0{,}1} -\frac{5}{128}(1+\xi)^{-7/2}x^4 \leq \int_0^{0{,}1}\left(-\frac{5}{128}x^4\right)dx$$
$$= -\frac{1}{128}x^5\Big]_0^{0{,}1} =$$

Örnek

$f(x) = e^x \cos x$ fonksiyonu için
a) $x_0 = 0$ noktasında 2. mertebeden $P_2(x)$ Taylor polinomunu hesaplayınız
b) $P_2(0{,}5)$'i kullanarak $f(0{,}5)$ değerini tahmini hesaplayınız ve hatasını değerlendiriniz
c) $|f(x) - P_2(x)|$ hatasını $[0,1]$ aralığında değerlendiriniz (solda yuvarlak içinde: "ödev")

d) $\int_0^1 P_2(x)\,dx$'i kullanarak $\int_0^1 f(x)\,dx$ integralinin değerini tahmini hesaplayınız ve hatasını değerlendiriniz

a)

$$f(x) = \underbrace{P_2(x)}_{\substack{\text{2. mertebeden}\\ \text{Taylor polinomu}\\ \text{(tahmini değer)}}} + \underbrace{R_2(x)}_{\substack{\text{kalan terim}\\ \text{(kesim hatası)}}}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \;;\quad x_0 = 0 \text{ için yeniden yazalım}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x)^k$$

$\Rightarrow$ Bu durumda $P_2(x)$

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}^{2} + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \qquad \xi \in (0,x) \text{ veya } \xi \in (x,0)$$

orj. s. 7

Türevleri hesaplayalım

$$f(x) = e^x \cos x \;\Rightarrow\; f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^x \cos x + (-\sin x)e^x = e^x(\cos x - \sin x) \;\Rightarrow\; f'(0) = 1$$
$$f''(x) = e^x(\cos x - \sin x) + (-\sin x - \cos x)e^x =$$
$$= -2e^x \sin x$$
$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -2\left[e^x \sin x + \cos x\, e^x\right] = -2e^x(\sin x + \cos x)$$
$$f'''(\xi) = -2e^{\xi}(\sin\xi + \cos\xi)$$

$$P_2(x) = 1 + x$$
$$R_2(x) = -\frac{1}{3}e^{\xi}(\sin\xi + \cos\xi)x^3$$
$$P_2(0{,}5) = 1{,}5$$
$$R(0{,}5)^3 = P_2(0{,}5) + \underbrace{R_2(0{,}5)}_{\text{hata terimi}}$$

$$R_2(0{,}5) = -\frac{1}{3}e^{\xi}(\sin\xi + \cos)(0{,}5)^3$$
$$= -\frac{1}{3}e^{\xi}(\sin\xi + \cos)\frac{1}{8}$$
$$= -\frac{1}{24}e^{\xi}(\sin\xi + \cos\xi)$$
$$\xi \in [0;\ 0{,}5]$$

[2] Claude notu: muhtemelen $\frac{f'(0)}{1!}x$ olmalı.
[3] Claude notu: muhtemelen $f(0{,}5)$ olmalı.

0,5'te max değer alır

$$|R_2(0{,}5)| \le \frac{1}{24} e^{\xi}(\sin\xi + \cos\xi) \le 0{,}09322200499$$

$$\underbrace{f(0{,}5)}_{\substack{\text{gerçek değer}\\ 1{,}44688903658}} - \underbrace{P_2(0{,}5)}_{\substack{\text{tahmini değer}\\ 1{,}5}} = R_2(0{,}5)$$

$$R_2(0{,}5)^4 - 0{,}09322200499 \le f(0{,}5) \le P_2(0{,}5) + 0{,}09322200499$$

[4] Claude notu: muhtemelen $P_2(0{,}5)$ olmalı.