Nümerik Analiz

Vize notlarım 1 – Temel teoremler, kök bulma, interpolasyon, nümerik türev ve integral

Orijinal not: numerik-notlarim1-vize.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

Nümerik Analiz

Teorem 1 (Rolle Teoremi)

$f \in C[a,b]$ ve türevlenebilir

$f(a) = f(b) \rightarrow$ en az bir $x = c \in [a,b]$'de $f'(c) = 0$

Teorem 2 (Ortalama değer Teoremi)

$f \in C[a,b]$ ve f (a,b) diferansiyellenebilir

$$c \in (a,b) \longrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorem 3 (Extremum değer teoremi)

$f \in C[a,b]$ $x \in ? \; c_1, c_2 \in [a,b]$

$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ olsun

f (a,b)'de türevlenebilirse $\rightarrow$ c_1 ve c_2 noktaları aralığın uç noktaları yada f'nin sıfır olduğu noktalar.

Teorem 4 (Ara değer teoremi)

$f \in C[a,b]$ $f(a) \cdot f(b) < 0$

O halde öyle bir $c \in (a,b)$ bulunur ki $f(c) = 0$

orj. s. 2

Riemann manasında integrallenebilir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Taylor polinomu ve Mclaurin

$$f(x) = \underbrace{P_n(x)}_{\substack{\text{tahmini} \\ \text{değer}}} + \underbrace{R_n(x)}_{\substack{\text{kesim} \\ \text{hatası}}}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$x_0 = 0$ Mclaurin serisini verir

orj. s. 3

Tek değişkenli fonksiyonlar ve kök bulma yöntemi

1) Bisection

$$f \in C[a,b] \quad \text{ve} \quad f(a) \cdot f(b) < 0$$
$$a_1 = a \qquad b_1 = b$$
$$p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

if $f(p_1) \cdot f(a) < 0$ ise $p \in (a, p_1)$
else if $f(p_1) f(b) < 0$ ise $p \in (p_1, b)$

n. step $\rightarrow [a_n, b_n] \rightarrow f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$

$p \in (a_n, b_n) \qquad p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

Hatası: $|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$

orj. s. 4

Sabit nokta (fixed point iteration)

$$f(x) = g(x) - x = 0 \quad \text{olsun}$$
$$g(x) = x$$

$g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $g(p) = p$ olacak şekilde bir $p \in [a,b]$ sayısı bulunuyorsa p'ye $g(x)$ fonksiyonun sabit noktası denir.

$$p_n = g(p_{n-1})$$

Teorem

$g \in C[a,b]$

1) Eğer her $x \in [a,b]$ için $g(x) \in [a,b]$ oluyorsa g fonksiyonun $[a,b]$'de en az bir adet sabit noktası vardır.
2) 1 sağlanıyorsa, eğer $x \in (a,b)$ için $|g'(x)| \leq k$ olacak biçimde bir $0 < k < 1$ bulunabiliyorsa o halde, g fonksiyonun $[a,b]$ aralığında sabit noktası tektir.
3) 1 ve 2 sağlanıyorsa, her $p_0 \in [a,b]$ başlangıç iterasyonu için $p_n = g(p_{n-1})$ SNI g fonksiyonunun $p \in [a,b]$ sabit noktasına yakınsak olur.

orj. s. 5

Hatası: Teorem'in koşulları sağlandığında p_n SNI'nun p sabit noktasına yaklaşımındaki hata

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a,\ b - p_0\}$$

Newton-Raphson

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ için $f(x) = 0$, $x = p$ olsun

$f \in C^2[a,b]$ ve $p_0 \in [a,b]$ bir nokta

$f'(p_0) \neq 0$ ve $|p - p_0|$ küçük bir büyüklük.

$$0 = f(p) = f(p_0) + f'(p_0)(p - p_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(p - p_0)^2$$

$$p \cong p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} = p_1$$

$$\Rightarrow \quad p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$R_n = \frac{f''(\xi)}{2!}(p - p_0)^2$$

Teorem

orj. s. 6

$f \in C^2[a,b]$, Eğer $p \in (a,b)$ noktasında $f(p) = 0$ ve $f'(p) \neq 0$ olursa o halde öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, Newton iterasyonu her $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ başlangıç iterasyonu için p sayısına yakınsar.

Sekant yöntemi

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

İterasyon yöntemlerinde hata analizi

Eğer; $\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = \lambda$

p_n, p sayısına α'ıncı dereceden yakınsaktır

Sabit nokta iterasyonu lineer

Newton-raphson quadratik yakınsar (Basit kök için)

orj. s. 7

Lagrange interpolasyonu

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}(x) \cdot f(x_k)$$

$$L_{n,k} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)}_{\text{Hata}}$$

orj. s. 8

Newton bölünmüş farklar interpolasyon polinomu

$$n_k = \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i)$$

ve $a_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ olmak üzere

$$N(x) = \sum_{i=0}^{k} a_k\, n_k(x)^{1}$$

orj. s. 9

(Bu sayfa defterde yan çevrilerek yazılmış: bölünmüş farklar tablosu.)

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
x_0	$f[x_0]$		
		$\boxed{\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}}$ $f[x_0,x_1]$	
x_1	$f[x_1]$		$\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
		$\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		
		$\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		
		$\dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$	
x_4	$f[x_4]$		
		$\dfrac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$	
x_5	$f[x_5]$		

orj. s. 10

Hermite Polinomu

(*) $H(x_k) \Rightarrow f(x_0)\, f(x_1)\, f(x_2) \cdots f(x_n)$ $\quad n+1$

(**) $H'(x_k) \Rightarrow f'(x_0)\, f'(x_1)\, f'(x_2) \cdots f'(x_n)$ $\quad +\ n+1$

$2n+2$ bilgi

$$H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1}$$

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} h_{n,k}(x) f(x_k) + \sum_{k=0}^{n} \hat{h}_{n,k}(x) f'(x_k)$$

$$H_{n,k}(x) = \left[1 - 2(x - x_k) L'_{n,k}(x_k)\right] L^2_{n,k}(x)$$

$$\hat{h}_{n,k}(x) = (x - x_k) L^2_{n,k}(x)$$

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2$$

[1] Claude notu: toplam indisi muhtemelen $\sum_{k=0}^{n}$ olmalı.

Kübik spline interpolasyonu

orj. s. 11

$[a,b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonu var olsun

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$S(x) \begin{cases} S_0(x) & ; \ a = x_0 \le x \le x_1 \\ S_1(x) & , \ x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) & x_{n-1} \le x \le x_n = b \end{cases}$$

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

a) $S_0(x_0) = f(x_0)$, $S_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$,
$k = 0, 1, \ldots, n-2$, $S_{n-1}(x_n) = f(x_n)$

b) $S_k'(x_{k+1}) = S_{k+1}'(x_{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$

c) $S_k''(x_{k+1}) = S_{k+1}''(x_{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$

d) Şunlardan biri sağlansın

(doğal) natural 1) $S''(x_0) = 0 = S''(x_n) \iff S_0''(a) = S_{n-1}''(b) = 0$

bağlanmış clamped 2) $S'(x_0) = f'(x_0)$, $S'(x_n) = f'(x_n)$
$\iff S_0'(a) = f'(a)$, $S_{n-1}'(b) = f'(b)$

orj. s. 12

Nümerik Diferansiyelleme

İki nokta formülü:

$$f'(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - h\frac{f''(\xi)}{2}$$

$$\xi \ (x_0, \ x_0 + h)$$

geri fark tüm ileri fark formüllerinde $h \to -h$ konularak bulunur

3 nokta uç nokta formülü

$$f'(x_0) = P_2'(x_0) + \frac{f'''(\xi)}{6} 2h^2$$

$$P_2'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)\right]$$

3 nokta orta nokta formülü

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)\right] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

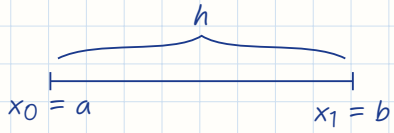
orj. s. 13

İkinci dereceden türev

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

Nümerik integralleme

Trapezoid (yamuk) kuralı



$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi_1)$$

$$f(x) \cong P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$E_1(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}(x - x_0)(x - x_1) \qquad \xi \in (x_0, x_1)$$

orj. s. 14

Simpson kuralı

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Kapalı Newton-Cotes formülü

$[a, b]$ kapalı aralık

$$x_0 = a, \quad x_n = b$$

$$x_k = x_0 + kh \qquad h = \frac{b - a}{n} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$ [2]

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b P_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k)$$

$$\alpha_k = \int_a^b \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}\,dx$$

$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k)$ $(n+1)$ adet noktadan kapalı NC formülü olsun,

$$x_0 = a, \quad x_n = b \quad \text{ve} \quad h = \frac{b - a}{n}$$

[2] Claude notu: toplam muhtemelen $k = 0$'dan başlamalı.

orj. s. 15

Böylece $\xi \in (a,b)$ sayısı, n çift ve $f \in C^{n+2}[a,b]$ olacak biçimde

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \cdot \int_0^n t^2 (t-1)\cdots(t-n)\,dt$$

n tek ve $f \in C^{n+1}[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k) + \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)\,dt^3$$

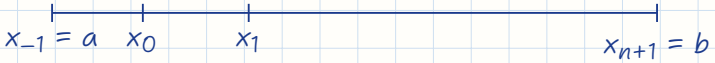
Açık Newton-Cotes formülü (? Ara nokta)

(a,b) açık aralık

$$x_{-1} = a, \quad x_{n+1} = b$$

$$x_k = x_0 + kh \qquad h = \frac{b-a}{n+2}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\,f(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi_1)$$

[3] Claude notu: muhtemelen h^{n+2} olmalı.