Olasılık ve Rastgelelik

Final için not – Ders 7–12

Orijinal not: Olasilik-Final-icin-Not.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

Ders 7

İki ayrık rasgele değişken $(X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ortak okf ile tam olarak tanımlanabilir.

$P_{X,Y}(x, y) = P\{X = x,\ Y = y\}$

Özellikleri:

1) $P_{X,Y}(x, y) \geq 0$
2) $\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} P_{X,Y}(x, y) = 1$

} Bir tablo verilirse $P_{X,Y}(x, y)$ Hesaplanmak istenen koşul incelenir, x veya y yerine konarak tablodan değer alınır.

Örnek

$P(X + Y = 4) = P_{X,Y}(1,3) + P_{X,Y}(2,2) + P_{X,Y}(3,1)$

$X \in [1,4],\quad Y \in [1,4]$

Marjinal okf

$$P_X(x) = \sum_{y\in\mathcal{Y}} P_{X,Y}(x, y) \quad \rightarrow y \text{ boyunca toplam}$$

$$P_Y(y) = \sum_{x\in\mathcal{X}} P_{X,Y}(x, y) \quad \rightarrow x \text{ boyunca toplam}$$

Koşullu okf

X'in koşullu okf'si:

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{X,Y}(x, y)}{P_Y(y)}$$

Y'nin koşullu okf'si:

$$P_{Y|X}(y|x) = \frac{P_{X,Y}(x, y)}{P_X(x)}$$

Sabit bir x için

$$\sum_{y\in\mathcal{Y}} P_{Y|X}(y|x) = 1$$

Zincir kuralı:

$$P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)\,P_{Y|X}(y|x)$$

Bayes kuralı:

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{Y|X}(y|x)}{\sum_{x' \in \mathcal{X}} P_{Y|X}(y|x')\,P_X(x')}\,P_X(x)$$

Bağımsızlık:

X ve Y ayrık rasgele değişkenleri aşağıdaki şartı sağlıyorsa bağımsızdır

$$P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)\,P_Y(y)$$

X ve Y bağımsızsa

$$P_{Y|X}(y|x) = P_Y(y) \quad \text{ve}$$
$$P_{X|Y}(x|y) = P_X(x)\text{'dir}$$

İki sürekli rasgele değişken: Ortak oyf

İki sürekli rasgele değişen $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ ortak oyf $f_{X,Y}(x,y)$ ile tam olarak tanımlanabilir

$$P\{(X,Y) \in A\} = \int_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Örneğin dikdörtgen bir alan için

$$P\{a < X \le b,\ c < Y \le d\} = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Özellikleri:

1) $f_{X,Y}(x,y) \ge 0$
2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

⋆ Okf bir olasılık değildir.[1] Olasılıkla ilişkisi aşağıdaki gibidir:

$$P\{x < X \le x+\Delta x,\ y < Y \le y+\Delta y\} \approx f_{X,Y}(x,y)\ \underset{\uparrow \text{ integral}}{\Delta x\,\Delta y}$$

Örnek

$$P\left\{X \ge \tfrac{1}{2}Y\right\} = \int_{\{(x,y):\, x \ge \frac{1}{2}y\}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{İkikatlı integral}$$

Marjinal oyf

X'in marjinal oyf'si:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

Y'nin marjinal oyf'si:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

[1] Claude notu: muhtemelen "oyf" olmalı.

Ders 8

Y'nin koşullu oyf'si:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

X'in koşullu oyf'si:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Sabit bir x için $f_{Y|X}(y|x)$ Y'nin okf'sidir. $f_{Y|X}(y|x) \geq 0$ ve integrali 1'e eşit.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x)\,dy = 1$$

Zincir kuralı:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_{Y|X}(y|x)$$

Bayes kuralı:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|u)\,f_X(u)\,du} f_X(x)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) \Rightarrow X \text{ ve } Y \text{ bağımsızdır}$$

X ve Y bağımsızsa

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) \quad \text{ve} \quad f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)\text{'dir}$$

Bir ayrık ve bir sürekli rasgele değişken

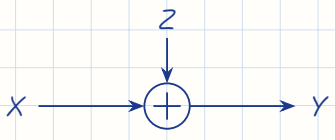
X okf'si $P_X(x)$ olan bir ayrık rasgele değişken olsun. Her $X = x$ için, $P_X(x) \neq 0$ koşullu oyf'si $f_{Y|X}(y|x)$ olan Y sürekli değişkeni olsun.

$$\Rightarrow f_Y(y) = \sum_x f_{Y|X}(y|x)\,P_X(x)$$

X'in Y'ye göre sonsal okf'si ? *delimit* durumunda aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)}{f_Y(y)} P_X(x) = \frac{f_{Y|X}(y|x)}{\sum_{x'} f_{Y|X}(y|x')\,P_X(x')} P_X(x)$$

Toplamsal Gauss gürültü kanalı



Gönderilen bit ayrık bir rasgele değişken olarak modellenir:

$$X = \begin{cases} x_0, & p \text{ olasılıkla} \\ x_1, & 1-p \text{ olasılıkla} \end{cases}$$

- Toplamsal gürültü bir Gauss r.d.'dir $\quad Z \sim N(0, \sigma_Z^2)$
- Alınan işaret $Y = X + Z$ şeklindedir ve burada X ve Z bağımsızdır

Ortak bdf (birikimli dağılım fonksiyonu)

İki r.d. (X, Y) ortak bdf $F_{X,Y}(x, y)$ ile tam olarak tanımlanabilir.

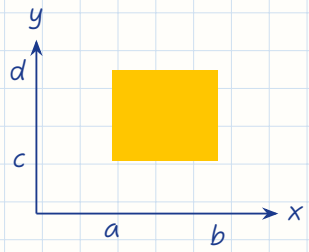
$$F_{X,Y}(x, y) = P\{X \le x,\ Y \le y\}, \qquad (x, y) \in (-\infty, \infty)$$

Özellikleri:

- $F_{X,Y}(x, y) \ge 0$
- $x_1 \le x_2$ ve $y_1 \le y_2$ olmak üzere her zaman $F_{X,Y}(x_1, y_1) \le F_{X,Y}(x_2, y_2)$
- $\lim_{x,y\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = 1$
- $\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)$ ve $\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y)$
- $\lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0$ ve $\lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0$

⋆ Bir olayın olasılığı ortak bdf ile belirlenebilir

Örnek: $\{(x, y) : a < x \le b,\ c < y \le d\}$ olayının olasılığı



$$P\{a < X \le b,\ c < Y \le d\} = F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c) + F_{X,Y}(a, c)$$

(X, Y) rasgele değişkenleri sürekli ise

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u, v)\,du\,dv$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x\,\partial y}$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)\,F_Y(y)$$

Ders 9

Bağımsız iki ayrık r.d.'nin toplamı

X ve Y bağımsız iki ayrık r.d. ve $W = X + Y$ olsun. W'nun dağılımı nedir?

$X \sim P_X(x)$ ve $Y \sim P_Y(y)$ tam sayı-değerli r.d.'ler olsun. Bu durumda toplamlarının okf'si:

$$P_W(w) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} P_X(x)\,P_Y(w - x)$$

[iki okf'nin ayrık konvolüsyonudur]

$X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ ve $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ bağımsız iki r.d. ise bunların toplamı W'nun okf'sini bulunuz.

$$\begin{aligned} p_W &= \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_X(x)\, p_Y(w-x) \\ &= \sum_{x=0}^{w} p_X(x)\, p_Y(w-x) \\ &= \sum_{x=0}^{w} \frac{\lambda_1^x}{x!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{(w-x)}}{(w-x)!} e^{-\lambda_2} \\ &= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^w}{w!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \underbrace{\sum_{x=0}^{w} \frac{w!}{x!\,(w-x)!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^x \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{w-x}}_{1} \end{aligned}$$

$$p_W(w) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^w}{w!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

Bağımsız iki sürekli r.d.'nin toplamı

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(w-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(w-x)\, f_X(x)\, dx$$

- $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ve $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ bağımsız olsun.
- $W = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ olarak bulunur.

Beklenen değer

- $X \sim p_X(x)$ ayrık bir r.d. ve $g(x)$, x'in bir fonksiyonu olsun.

$$E[g(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x)\, p_X(x)$$

- Sürekli r.d. $X \sim f_X(x)$ için $g(X)$'in beklentisi

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$$

Beklenti doğrusaldır

$$E[a\, g_1(X) + b\, g_2(X)] = a\, E[g_1(X)] + b\, E[g_2(X)]$$

$g(x) = c$, bir sabit ise, $E[g(X)] = c$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2\, \text{Var}(X)$$

korelasyon ve kovaryans

$(X, Y) \sim f_{X,Y}(x, y)$ ve $g(x, y)$, x ve y'nin bir fonksiyonu olsun. $g(X, Y)$'nin beklentisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\, f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy$$

Korelasyon $= E[XY]$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]\, E[Y]$$

Eğer $X = Y$ ise

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Var}(X)$$

Eğer $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ ise

X ve Y birbirinden ilişkisizdir ve $E[XY]=E[X]\,E[Y]$

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2$$

★ Korelasyon katsayısı

$$\rho_{X,Y}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}$$

X ve Y ilişkisizse, $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$, $\rho_{X,Y}=0$ olur.

- $-1\le\rho_{X,Y}\le 1$'dir.
- Eğer $\rho_{X,Y}=\pm 1$ ise $\dfrac{X-E[X]}{\sigma_X}=\mp\dfrac{Y-E[Y]}{\sigma_Y}$[2] doğrusal bir fonksiyonu ise $\rho_{X,Y}=\pm 1$'dir.
- $\rho_{X,Y}$ bize X'in Y'nin bir doğrusal fonksiyonu olarak ne kadar iyi kestirilebileceğinin bilgisini verir.

orj. s. 2

Ders 9 Devamı

Koşullu beklenti

İki sürekli rasgele değişken $(X,Y)\sim f_{X,Y}(x,y)$ olsun

ve

$$\underset{\text{X'in Y'ye göre okf'si}}{f_{X|Y}(x|y)}=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$\Rightarrow$ Herhangi bir $g(x,y)$ fonksiyonun $f_{X|Y}(x|y)$'ye göre beklentisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$E[g(X,Y)|Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)\,f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

$g(x,y)=x$

$$\Rightarrow\ E[X|Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

Bir rasgele değişken olarak koşullu beklenti

- Koşullu beklenti $E[g(X,Y)|Y=y]$ y'nin bir fonksiyonudur. $E[g(X,Y)|Y]$ beklenen değeri Y rasgele değişkenin bir fonksiyonu olduğu için bir rasgele değişkendir.

$E[X|Y]=Z=\dfrac{1-Y}{2}$'nin oyf'si bulmak için Y'nin doğrusal bir fonksiyonun, $Z=aY+b$, okf'si için bulduğumuz formülü kullanabiliriz.

$$Z=aY+b\ \Rightarrow\ f_Z=\frac{1}{|a|}f_Y\left(\frac{z-b}{a}\right)$$

[2] Claude notu: muhtemelen ± olmalı (ρ = +1 için işaretler aynıdır).

Koşullu beklentinin ortalaması

$$E_Y[E[g(X,Y)|Y]] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} E[g(X,Y)|Y=y]\, f_Y(y)\, dy$$

Örnek

$$E_Y\left[\frac{1-Y}{2}\right] = \int_0^1 \frac{1-y}{2} \underbrace{2(1-y)}_{f_Y}\, dy = \frac{1}{3}$$

Yenilenen beklenti:

$$E_Y[E_{X|Y}[g(X,Y)|Y]] = E[g(X,Y)]$$

Burada $E_{X|Y}$, $f_{X|Y}(x|y)$'ye göre beklentidir.

koşullu varyans

(X,Y) r.d.'leri için $\{Y=y\}$ olarak verildiğinde X'in koşullu varyansı aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\mathrm{Var}(X|Y) = E[X^2|Y] - (E[X|Y])^2$$

Moment üreten fonksiyonlar

- Bir X rasgele değişkenin olasılık dağılımına ait dönüşüm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$M_X(s) = E[e^{sX}] = \begin{cases} \sum_x e^{sx} p_X(x), & X \sim p_X(x) \text{ ise} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x)\, dx, & X \sim f_X(x) \text{ ise} \end{cases}$$

- Bu dönüşüme moment üreten fonksiyon denir.
- $s = j\omega$ için ($j = \sqrt{-1}$ ve ω gerçek) dönüşüm, $M_X(j\omega)$ karakteristik fonksiyon adını alır.

$$\underbrace{M_X(s)}_{\text{Laplace}} \qquad \underbrace{M_X(j\omega)}_{\text{Fourier}}$$

Örnek

$X \sim \mathrm{Bern}(p)$ olsun. $p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1-p$

$$M_X(s) = ? = E[e^{sX}] = \sum_{k=0}^{1} e^{sk} p_X(k)$$
$$= (1-p) + p\, e^s$$

Örnek

$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, olsun

$$p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$M_X(s) = E[e^{sX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{sk} p_X(k)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{sk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^s\lambda)^k}{k!}$$
$$= e^{-\lambda} e^{e^s\lambda} = \boxed{e^{\lambda(e^s-1)}}$$

Örnek

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$ olsun

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$M_X(s) = E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x)\,dx$$
$$= \int_0^{\infty} e^{sx} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^{\infty} \lambda\, e^{(s-\lambda)x}\,dx$$
$$= \lambda \left(\frac{e^{(s-\lambda)x}}{s-\lambda} \Big|_0^{\infty} \right) \qquad s - \lambda < 0$$
$$= \lambda \left(\frac{-1}{s-\lambda} \right) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$$

Örnek

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ olsun

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$M_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2 - 2\mu x - 2\sigma^2 sx + \mu^2}{2\sigma^2}}\,dx$$
$$= e^{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left(x - (\mu + s\sigma^2)\right)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$
$$= e^{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}}$$

Türev üreten fonksiyonun özellikleri

$X \sim p_X(x)$ olsun. $M_X(s)$'nin s'ye göre birinci dereceden türevi:

$$M_X^{(1)}(s) = \frac{d}{ds} M_X(s) = \frac{d}{ds} \sum_x e^{sx} p_X(x)$$
$$= \sum_x x e^{sx} p_X(x)$$

Bu türevin $s = 0$'daki değeri bize birinci momenti verir.

$$M_X^{(1)}(0) = \sum_x x\, p_X(x) = E[X]$$

Türev almayı tekrarlasak

$$M_X^{(k)}(0) = E[X^k]$$

$$\frac{d^k}{ds^k} M_X(s)\Big|_{s=0} = \sum_x x^k p_X(x)$$

Ders 10

Çoklu rasgele değişkenler

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ aynı olasılık uzayında tanımlanmış rasgele değişkenler olsun

Ayrık ise ortak okf

$$p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{şeklinde tanımlanır}$$

Sürekli ise ortak oyf

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Marjinal oyf (okf)'ler $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$'nin bir alt kümesinin ortak oyf'sidir.
- $n = 3$ için marjinal oyf'ler

$$f_{X_1}(x_1),\ f_{X_2}(x_2),\ f_{X_3}(x_3),\ f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$
$$f_{X_1,X_3}(x_1,x_3),\ f_{X_2,X_3}(x_2,x_3)$$
$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)\,dx_3$$

oyf, okf, zincir kuralı, bdf, Bayes de çalışır

Bağımsızlık

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ rasgele değişkenleri eğer ortak okf/oyf/bdf'leri marjinallerin çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa bağımsızdır.

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ rasgele değişkenleri bağımsız ve türdeş dağılımlı, eğer bağımsız ve aynı marjinal dağılım sahiplerse

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i)$$

Rasgele değişkenlerin istatistiklerinin kestirimi

X'in ortalamasını kestirmek için

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

X'in ikinci momentini kestirmek için:

$$\bar{x}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$P(X \in A)$ olasılığını kestirmek için $x_i \in A$ iken $y_i = 1$ diğer durumlarda $y_i = 0$ olan bir değişken tanımlayalım.

$$\overline{P(A)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

- (X, Y)'nin korelasyonunu kestirmek için

$$\bar{C}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

> *Şekil:* Bu sayfa basılı materyal içeriyor (ör. ders slaytı); dijitalleştirilmedi. (Yapıştırılmış slayt parçası: dağılımların θ parametreleriyle tanımlanması ve Bern, Geom, Binom, Poisson, Unif, Exp, N için parametre tablosu.)
> *(orijinal notta, s. 2)*

En büyük olabilirlik kestirimi

- $X \sim P_X(x;\theta)$ ve θ parametresi bilinmiyor olsun.
- θ'yı kestirmek için $P_X(x;\theta)$ dağılımından bağımsız ve türdeş üretilmiş eğitim veri kümesi $\{x_i\}_{i=1}^n$ kullanalım.
- En büyük olabilirlik kestiriminde eğitim veri kümesini üreten olabilirliği (likelihood) en büyük yapacak şekilde θ seçilir.

$$\begin{aligned} L(\theta) &= P_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta), \\ &= \prod_{i=1}^{n} P_X(x_i;\theta) \end{aligned}$$

Daha sıklıkla olabilirliğin logaritması en büyüklenir.

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln P_X(x_i;\theta)$$

orj. s. 3

Ders 10 devamı

Örnek

$X \sim \text{Bern}(p)$ ve p parametresi bilinmiyor olsun. p'yi Bern(p) dağılımından bağımsız ve türdeş

olarak üretilmiş eğitim veri kümesi $\{x_i\}_{i=1}^n$ kullanarak EOK ile bulalım

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} \text{Bern}(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

$$\ell(p) = \sum_{i=1}^{n} \ln p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

$$= \ln p \sum_{i=1}^{n} x_i + \ln(1-p) \sum_{i=1}^{n} (1-x_i)$$

$$= n\bar{x} \ln p + (n - n\bar{x}) \ln(1-p)$$

Burada $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

Olabilirliği en büyük yapan $\hat{p}$'yi bulmak için $\ell(p)$'nin türevini alıp sıfıra eşitleyelim

$$\frac{d\ell(p)}{dp} = \frac{n\bar{x}}{p} - \frac{n - n\bar{x}}{1-p} = 0$$

$$n\bar{x}(1-p) = (n - n\bar{x})p$$

$$\hat{p} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Örnek (Gauss parametrelerin EOK'si)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ve $\theta = (\mu, \sigma^2)$ parametreleri bilinmiyor olsun

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} N(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ell(\mu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \sigma^2 - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

Olabilirliği en büyük yapan $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}^2$'yi bulmak için $\ell(\mu, \sigma^2)$'nin μ ve σ^2'ye göre kısmi türevlerini alıp sıfıra eşitleyelim!

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} = 0$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0$$

$$\frac{n}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^4} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})^2$$

Rasgele değişkenlerin toplamının ortalaması

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ rasgele değişkenlerinin toplamı $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ olsun. Toplamlarının ortalaması aşağıdaki gibidir:

$$E[Y] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

Örnek

Binom rasgele değişkenlerinin ortalaması

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Örnek ortalaması kestiriminin ortalaması

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$'dir. Örnek ortalamasının beklentisi:

$$E[\bar{X}_n] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

Rasgele değişkenlerin toplamının varyansı

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ rasgele değişkenlerin toplamı $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Toplamlarının ortalaması[3] aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= E\left[(Y - E[Y])^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

Eğer rasgele değişkenler bağımsızsa tüm $i \neq j$ için $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ olacağından

$$\mathrm{Var}(Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$$

Şekil: Basılı slayt parçası (dijitalleştirilmedi): Binom rasgele değişkeninin varyansı örneği (X_i bağımsız ve türdeş dağılımlı Bern(p), $Y = \sum X_i$ binom).
(orijinal notta, s. 3)

Örnek

$$\mathrm{Var}(Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$$

[3] Claude notu: muhtemelen "varyansı" olmalı.

Örnek ortalaması kestiriminin varyansı

> **Şekil:** Basılı slayt parçası (dijitalleştirilmedi): bağımsız ve türdeş dağılımlı $X_1, \ldots, X_n$ için örnek ortalaması $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum X_i$ tanımı.
> *(orijinal notta, s. 3)*

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)$$

$\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Var}(X)$, $i = 1, \ldots, n$ olduğundan

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\mathrm{Var}(X)}{n}$$

Markov eşitsizliği

$X \geq 0$ rasgele değişkeni pozitif ve sonlu bir ortalaması $E[X]$ olsun. Bu durumda $a > 1$ sayısı için

$$P\{X \geq aE[X]\} \leq \frac{1}{a}$$

Örnek

$X \geq 0$ rasgele değişkeni bir bölgede yaşayan bir insanın yaşı olsun. Bu bölgede yaşayan insanların yaş ortalaması $E[X] = 35$ ise nüfusun ne kadarı 70 ve üzerindedir. Cevabı tam bilemeyiz ama nüfusun ?yarısından azı 70 yaş ve üzerindedir diyebiliriz $P\{X \geq 70\} \leq \frac{1}{2}$

Örnek

$X \geq 0$ ve $E[X] = 1$ olsun. Markov eşitsizliğine göre

$$P\{X \geq 10\} \leq \frac{1}{10}$$

Şimdi X'in bir üstel dağılıma sahip olduğunu kabul edelim. $X \sim \mathrm{Exp}(1)$ ise $E[X] = 1$ olur. $P\{X \geq 10\}$ olasılığı kesin olarak hesaplayabiliriz.

$$P\{X \geq 10\} = e^{-10} \approx 4.55 \cdot 10^{-5} \ll \frac{1}{10}$$

- Buna rağmen X r.d. hakkında bildiğimiz tek şey ortalaması ise Markov eşitsizliği elde edebileceğimiz en iyi sınırdır.

Chebyshev eşitsizliği

$X \geq 0$ rasgele değişkenin sonlu bir ortalaması $E[X]$ ve varyansı σ_X^2 olsun. Bu durumda $a > 1$ sayısı için:

$$P\{|X - E[X]| \geq a\sigma_X\} \leq \frac{1}{a^2}$$

Şekil: Basılı slayt parçası (dijitalleştirilmedi): Örnek – bir entegre devrenin parametresi X (ortalama $E[X]$, varyans σ_X^2); X ortalamadan $3\sigma_X$ veya daha fazla uzaksa devre standart dışı; $P\{|X - E[X]| \geq 3\sigma_X\}$ nedir? *(orijinal notta, s. 3)*

$$P\{|X - E[X]| \geq 3\sigma_X\} \leq \frac{1}{9}$$

Chebyshev eşitsizliği çok geniş bir sınır verebilir

$X \geq 0$, $E[X] = 0$ ve $\sigma_X^2 = 1$ olsun

$$P\{|X| \geq 3\} \leq \frac{1}{9}$$

Şimdi X'in bir Gauss dağılıma sahip olduğunu kabul edelim. $X \sim N(0,1)$ ise $E[X] = 0$ ve $\sigma_X^2 = 1$'dir. $P\{|X| \geq 3\}$ olasılığını kesin olarak hesaplayabiliriz.

$$P\{|X| \geq 3\} = P\{X \geq 3\} + P\{X \leq -3\}$$
$$= 2\Phi(-3) = 2(1 - \Phi(3)) \approx 2 \cdot 10^{-3} \ll \frac{1}{9}$$

Buna rağmen X r.d. hakkında sadece ort ve varyansı biliyorsak chebyshev eşitsizliği elde edebileceğimiz en iyi sınırdır.

Ders 11

Limit teoremleri

Büyük sayıların zayıf yasası

Şekil: Bu sayfa basılı materyal içeriyor (ör. ders slaytı); dijitalleştirilmedi. (Bu sütunda basılı slayt parçaları: büyük sayıların zayıf yasası teoremi ve Chebyshev ile gösterimi, güvenirlik aralığı, anketör problemi, merkezi limit teoremine giriş; yalnızca el yazısı kısımlar aktarıldı.) *(orijinal notta, s. 3)*

Güvenirlik aralığı

Örnek

$\epsilon = 0{,}1\sigma_X$ ve $\delta = 10^{-3}$ olsun. Bu durumda

$$n = \frac{\sigma_X^2}{\delta\epsilon^2} = \frac{\sigma_X^2}{10^{-3} \cdot 0{,}01 \cdot \sigma_X^2} = 10^5$$

10^5 örnek seçilirse $\bar{X}_n$, $E[X]$'in $\pm 0{,}1\sigma_X$ civarında 0,999 güvenirliği ile kalmasını sağlar.

Güvenirlik aralığı: Anketör problemi

$$1 - 0{,}95 = 0{,}05$$

Chebyshev eşitsizliğini kullanırsak

$$P\{|\bar{X}_n - E[X]| \le \epsilon\} \ge 1 - \delta = 1 - \frac{\mathrm{Var}(\bar{X}_n)}{\epsilon^2} = 1 - \frac{\sigma_X^2}{n\epsilon^2}$$

- Bernoulli r.d.'nin varyansı $\sigma_X^2 = p(1-p)$'dir. p parametresini bilmiyoruz ama p 0 ile 1 arasında olduğundan $\sigma_X^2 = p(1-p) \le 0{,}25$ olacaktır. (Markov).

Böylece

$$P\{|\bar{X}_n - p| \le 0{,}01\} \ge 1 - 0{,}05 \ge 1 - \frac{0{,}25}{n(0{,}01)^2}$$

$$0{,}05 = \frac{0{,}25}{n(0{,}01)^2}$$

$$n = \frac{0{,}25}{0{,}05\,(0{,}01)^2} = 5 \cdot 10^4$$

Gauss rasgele değişkenlerinin toplamı

Bir Gauss r.d. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ için okf:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Gauss r.d.'lerin bazı kullanışlı özellikleri vardır.

- Eğer $Y = aX + b$ ise $Y \sim N(a\mu + b,\ a^2\sigma^2)$ olur.
- Eğer $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız ve $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ise $W = \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i,\ \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$ olur
- Gaussların ağırlıklandırılmış toplamı $W = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ da yine bir gausstur.

orj. s. 4

Ders 11 devamı

Standart toplam

$$Z_n = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\uparrow\ \text{örnek sayısı}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \overbrace{E[X]}^{\text{ortalama}}}{\underbrace{\sigma_X}_{\uparrow\ \text{varyans}}} \right)$$

Z_n standard bir r.d.'dir çünkü $E[Z_n] = 0$ ve $\sigma_{Z_n}^2 = 1$

- Z_n örnek ortalaması $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

Merkez limit teoremi (MLT)

> **Şekil:** Bu sayfa basılı materyal içeriyor (ör. ders slaytı); dijitalleştirilmedi. (Merkezi limit teoremi ve açıklaması basılı; yalnızca el yazısı örnekler aktarıldı.)
> *(orijinal notta, s. 4)*

Örnek

$\text{Bern}\left(\frac{1}{2}\right)$ $p = E[X]$ $\sigma^2 = p(1-p) = 0{,}25$, $\sigma = 0{,}5$

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \overbrace{E[X]}^{1/2}}{\sigma_X} \right)$$

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - 0{,}5}{0{,}5} \right)$$ 'nin bdf'si $Z \sim N(0,1)$'e yakınsar.

Örnek

$X_1, X_2, \ldots, X_n$'ler bağımsız ve türdeş dağılımlı tekdüze r.d.'leri, $U[-1,1]$ olsun. Bunların standart toplamı $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i}{\sqrt{1/3}} \right)$'nin oyf'si $Z \sim N(0,1)$'e yakınsar.

MLT ile güvenirlik aralığı

> **Şekil:** Basılı slayt parçaları (dijitalleştirilmedi): MLT ile n'nin kestirilmesi ($\delta = 2\Phi(-\epsilon\sqrt{n}/\sigma_X)$ formülü slaytta kırmızı çerçeveyle işaretlenmiş), $\epsilon = 0.1\sigma_X$, $\delta = 10^{-3}$ örneği ($n = 1089$) ve "MLT ile güvenilirlik aralığı: Anketör problemi" slaytı ($n = 9604$).
> *(orijinal notta, s. 4)*

Ders 12

Rasgele süreçler

> **Şekil:** Basılı slayt parçaları (dijitalleştirilmedi): "Ayrık zamanlı rasgele süreçler: Örnek" ($X[n] = Z^n$, $Z \sim U[0,1]$; örnek diziler) ve "Sürekli zamanlı rasgele süreçler" ($X(t) = \alpha\cos(\omega t + \Theta)$, $\Theta \sim U[0,2\pi]$; örnek fonksiyonlar).
> *(orijinal notta, s. 4)*

Ortalama ve özilişki (otokorelasyon) fonksiyonları

- Ortalama fonksiyonu: $\mu_X(t) = E[X(t)]$, $t \in \mathcal{T}$ için
- Özilişki/otokorelasyon fonksiyonu:

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

- Otokovaryans fonksiyonu:

$$C_X(t_1, t_2) = E\left[(X(t_1) - \mu_X(t_1))\,(X(t_2) - \mu_X(t_2))\right]$$
$$\Rightarrow\; C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\,\mu_X(t_2)$$

Örnek

$X(t) = \alpha\cos(\omega t + \Theta)$

$$\mu_X(t) = E[\alpha\cos(\omega t + \Theta)]$$
$$= \int_0^{2\pi} \alpha\cos(\omega t + \Theta)\;\underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\to \text{ oyf genliği}}\; d\Theta = 0$$

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{\alpha^2}{2\pi}\cos(\omega t_1 + \Theta)\cos(\omega t_2 + \Theta)\,d\Theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{\alpha^2}{4\pi}\left[\cos\left(\omega(t_1 + t_2) + 2\Theta\right) + \cos\left(\omega(t_1 - t_2)\right)\right]d\Theta$$
$$= \frac{\alpha^2}{2}\cos\left(\omega(t_1 - t_2)\right)$$

Durağan rasgele süreçler

- $X(t_1)$ (veya $X[n]$) rasgele sürecinin ortak oyf (okf), bdf gibi tüm sonlu dereceden dağılımları zamanla değişmiyorsa tam anlamda (*kesin*) durağan denir.
- $X(t)$ (veya $X[n]$) rasgele sürecin ortalama ve otokorelasyon fonksiyonları. Zamanla değişmiyorsa geniş anlamda durağandır
- $E[X(t)] = \mu$, zamandan bağımsız
- $R_X(t_1, t_2)$ sadece $\tau = t_2 - t_1$, zaman farkın bir fonksiyonudur.
- $E\left[(X(t))^2\right] < \infty$

Bir süreç tam anlamda durağan ise aynı zamanda geniş anlamda durağandır

Gauss rasgele süreçleri

Şekil: Basılı slayt parçası (dijitalleştirilmedi): Gauss rasgele süreci tanımı; Gauss sürecinin ortalama ve otokorelasyon fonksiyonuyla istatistiksel olarak tanımlanması; Gauss sürecinde tam ve geniş anlamda durağanlığın aynı olması. *(orijinal notta, s. 4)*

Geniş anlamda durağan sürecin otokorelasyon fonksiyonu

- $X(t)$ geniş anlamda durağan bir süreç olsun. Bu durumda otokorelasyon $R_X(t_1, t_2)$, $R_X(\tau)$ olarak ifade edilir.

1) $R_X(\tau)$ gerçek değerlidir. $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$
2) $|R_X(\tau)| \leq R_X(0) = E[X^2(t)]$, $X(t)$'nin ortalama gücü
3) $T \neq 0$ için $R_X(T) = R_X(0)$ ise $R_X(\tau)$ periyodik ve dolayısıyla $X(t)$ T ile periyodiktir.

Şekil: Basılı slayt parçası (dijitalleştirilmedi): Örnek – rasgele fazlı periyodik $X(t) = \alpha\cos(\omega t + \theta)$ sürecinin otokorelasyon fonksiyonu da periyodiktir, $R_X(\tau) = \frac{\alpha^2}{2}\cos(\omega\tau)$.
(orijinal notta, s. 4)

Şekil: Basılı slayt (dijitalleştirilmedi): "Hangi fonksiyon $R_X(\tau)$ olabilir?" – 8 grafik: (1) $e^{-\alpha\tau}$ $(\tau \geq 0)$, (2) $e^{-\alpha|\tau|}$, (3) $\tau = 0$'da çukur olan çift bir eğri, (4) $\operatorname{sinc}\tau$, (5) T periyotlu üçgen dalga, (6) $2^{-|n|}$, (7) $[-T, T]$ aralığında dikdörtgen, (8) sabit 1. Grafiklerin üzerindeki el yazısı notlar aşağıda.
(orijinal notta, s. 4)

1) çift değil, olamaz ×
2) $\tau = 0$'da maks değer alır, çifttir ✓
3) çifttir ama $\tau = 0$'da maks değerini almaz ×
4) $\tau = 0$'da maks değer alır, çifttir ✓
5) çift, $\tau = 0$'da maks, T ile periyodik ✓
6) çift, $\tau = 0$'da maks ✓
7) çift, $\tau = 0$'da maks ✓
8) çift, $\tau = 0$'da maks ✓

Otokorelasyon fonksiyonun yorumu

Şekil: Basılı slayt parçası (dijitalleştirilmedi): $R_X(\tau)$ hızlı azalıyorsa örneklerin ilişkisizleşmesi, yavaş azalıyorsa yüksek ilişkili olması; $R_{X_1}(\tau)$ (dar tepe) ve $R_{X_2}(\tau)$ (geniş tepe) grafikleri.
(orijinal notta, s. 4)

orj. s. 5

Ders 12 devamı

Güç spektral yoğunluğu

Geniş anlamda durağan bir rasgele süreç $X(t)$'nin güç spektral yoğunluğu $R_X(\tau)$'nun Fourier dönüşümüdür.

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

Ayrık zamanlı bir sürecin $X[n]$, otokorelasyon fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır

$$R_X[k] = E[X[n+k]\,X[n]]$$

ve güç spektral yoğunluğu $R_X[k]$'nın ayrık-zamanlı Fourier dönüşümüdür.

$$S_X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k]\, e^{-j\omega k}, \qquad -\pi < \omega < \pi$$

ters fourier dönüşümü ise

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df$$

$$R_X[k] = \int_{-\pi}^{\pi} S_X(e^{j\omega})\, e^{j\omega k}\, d\omega$$

Özellikleri

> *Şekil:* Bu sayfa basılı materyal içeriyor (ör. ders slaytı); dijitalleştirilmedi. (Güç spektral yoğunluğunun özellikleri slaytı ve "Ders 12" etiketli iki örnek grafik slaytı: $R_X(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ ve $R_X(\tau) = \frac{\alpha^2}{2}\cos\omega\tau$ için R_X ve $S_X(f)$ grafikleri; yalnızca el yazısı kısımlar aktarıldı.)
> *(orijinal notta, s. 5)*

Örnek

$$\begin{aligned}
S_X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|}\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\tau}\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau}\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j2\pi f)\tau}\, d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j2\pi f)\tau}\, d\tau \\
&= \frac{1}{\alpha - j2\pi f}\, e^{(\alpha - j2\pi f)\tau}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\alpha + j2\pi f}\, e^{-(\alpha + j2\pi f)\tau}\Big|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1-0}{\alpha - j2\pi f} - \frac{0-1}{\alpha + j2\pi f} = \frac{1}{\alpha - j2\pi f} + \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \\
S_X(f) &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}
\end{aligned}$$

> *Şekil:* Basılı slayt parçası (dijitalleştirilmedi): $R_X[k] = 2^{-|k|}$ dizisi ve $S_X(e^{j\omega}) = \frac{3}{5 - 4\cos\omega}$ grafikleri.
> *(orijinal notta, s. 5)*

$$S_X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k]\, e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|}\, e^{-j\omega k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} e^{-j\omega k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} e^{-j\omega k}$$

İkinci toplamda $m = -k$ dönüşümü yapılsın

$$S_X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{k} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)^{m}$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$
$$= \frac{1-\frac{1}{2}e^{j\omega} + \left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\frac{1}{2}e^{j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)}$$
$$= \frac{1-\frac{1}{4}}{1-\cos\omega+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5-4\cos\omega}$$

Beyaz gürültü süreci

> *Şekil:* Basılı slayt parçası (dijitalleştirilmedi): beyaz gürültü süreci için $R_X(\tau) = \frac{N}{2}\delta(\tau)$ ve $S_X(f) = \frac{N}{2}$ grafikleri, açıklayıcı maddeler ve beyaz Gauss gürültü süreci (WGN) tanımı. El yazısı not: $S_W(f) = \frac{N}{2}$ ifadesinden okla "Sürecin gücü".
> *(orijinal notta, s. 5)*

Isıl gürültü

> *Şekil:* Basılı slayt parçası (dijitalleştirilmedi): $\mathcal{R}$ direncindeki ısıl gürültünün, $S_V(f) = 2kT\mathcal{R}$ güç spektral yoğunluklu beyaz Gauss gürültülü $V(t)$ gerilim kaynağıyla modellenmesi ve devre şeması.
> *(orijinal notta, s. 5)*

Şekil: Basılı slayt parçası (dijitalleştirilmedi): "Ortak olarak geniş anlamda durağan rasgele süreçler" – çapraz-korelasyon $R_{XY}(\tau)$, özelliği $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$ ve çapraz-güç spektral yoğunluğu $S_{XY}(f) = \mathcal{F}\{R_{XY}(\tau)\}$. El yazısı eklemeler: $R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 + \tau, t_2 + \tau)$ ifadesinin sonuna "$= E[X(t_1)\,Y(t_2)]$" ve $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$ yanına "X ve Y'nin yeri önemlidir." *(orijinal notta, s. 5)*

Örnek

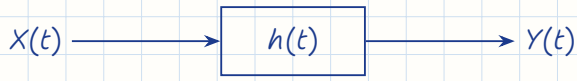
$X(t) = \alpha\cos(\omega t + \Theta)$ ve $Y(t) = \alpha\sin(\omega t + \Theta)$

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= E\left[\alpha^2 \cos(\omega t_1 + \Theta)\sin(\omega t_2 + \Theta)\right] \\ &= \frac{\alpha^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin\left(\omega(t_1 + t_2) + 2\Theta\right) - \sin\left(\omega(t_1 - t_2)\right)\right] d\Theta \\ &= -\frac{\alpha^2}{2}\sin\left(\omega(t_1 - t_2)\right) \end{aligned}$$

Doğrusal zamanla-değişmeyen sistemlerin geniş anlamda durağan süreçlere yanıtı

$h(t)$: birim dürtü yanıtı

$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$: frekans yanıtı



Sistemin çıkışı konvolüsyon ile bulunur

$$\begin{aligned} Y(t) = X(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)\,h(t - \tau)\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(t - \tau)\,h(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{YX}(\tau) &= E\left[\overbrace{Y(t + \tau)}^{t_1} X(t)\right] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\upsilon)\,X(t + \tau - \upsilon)\,X(t)\,d\upsilon\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\upsilon)\,E\left[X(t + \tau - \upsilon)\,X(t)\right] d\upsilon \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\upsilon)\,R_X(\tau - \upsilon)\,d\upsilon \end{aligned}$$

$$R_{YX}(\tau) = h(\tau) * R_X(\tau)$$

$Y(t)$'nin ortalaması

$$E[Y(t)] = E[X(t)]\,H(0)$$

$Y(t)$'nin otokorelasyonu:

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[Y(t + \tau)\,Y(t)] \\ &= h(-t) * R_{YX}(\tau) \\ &= h(-t) * h(\tau) * R_X(\tau) \end{aligned}$$

$Y(t)$'nin güç spektral yoğunluğu

$$S_Y(f) = \mathcal{F}\{R_Y(\tau)\}$$

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$