Olasılık ve Rastgelelik

Ödev 2 çözümleri: ortak yoğunluk, kovaryans, koşullu beklenti

Orijinal not: Olasilik-ve-Rastgelelik-Ders-12-29.05.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

Not: Orijinal dosyadaki basılı sayfalar (s. 1–4, 7, 11, 14–32) dijitalleştirilmedi; yalnızca el yazısı sayfalar aktarıldı.

orj. s. 5

① $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{15}{2}x(2-x-y), & 0<x<1,\ 0<y<1,\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

a) $$f_X(x)=\int_0^1 \frac{15}{2}x(2-x-y)\,dy=\frac{15}{2}\left(2xy-x^2y-\frac{1}{2}xy^2\right)\Big|_0^1$$
$$=\frac{15}{2}\left(2x-x^2-\frac{1}{2}x\right)=\frac{15}{4}x(-x+3)$$[1]

b) $$f_Y(y)=\int_0^1 \frac{15}{2}x(2-x-y)\,dx=\frac{15}{2}\left(x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}x^2y\right)\Big|_0^1$$

orj. s. 6

$$=\frac{15}{2}\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}y\right)=\frac{15}{12}(4-3y)$$

c) $$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{15}{2}x(2-x-y)\frac{4}{15}\frac{1}{x(3-x)}=\frac{2(2-x-y)}{(3-x)}$$

d) $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{15}{2}x(2-x-y)\frac{12}{15}\frac{1}{4-3y}=\frac{6x(2-x-y)}{4-3y}$$

orj. s. 8

③[2] $$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-2x-3y}, & 0<x,y<\infty\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

a) $$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]\,E[Y]$$

[1] Claude notu: muhtemelen $\frac{15}{4}x(-2x+3)$ olmalı.
[2] Claude notu: orijinal dosyadaki basılı ödev sorusunda bu, 2. sorudur.

$$E[X] = \int_0^\infty\int_0^\infty x\,6e^{-2x-3y}\,dx\,dy$$
$$= 6\int_0^\infty e^{-3y}\,dy \int_0^\infty xe^{-2x}\,dx \qquad \begin{pmatrix} u = x & du = dx \\ e^{-2x}dx = dv & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{pmatrix}$$
$$= 6\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3y}\Big|_0^\infty \cdot \left[-\frac{xe^{-2x}}{2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-2x}}{2}\,dx\right.$$
$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-2x}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$$

orj. s. 9

$$E[Y] = \int_0^\infty\int_0^\infty y\,6e^{-2x}e^{-3y}\,dx\,dy$$
$$= 6\int_0^\infty e^{-2x}\,dx \int_0^\infty ye^{-3y}\,dy \qquad \begin{pmatrix} u = y & du = dy \\ e^{-3y}dy = dv & -\frac{1}{3}e^{-3y} = v \end{pmatrix}$$
$$= 6\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\Big|_0^\infty \left[-\frac{ye^{-3y}}{3}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-3y}}{3}\,dy\right]$$
$$= 3\left(-\frac{1}{9}\right)e^{-3y}\Big|_0^\infty = \frac{1}{3}$$

$$E[XY] = \int_0^\infty\int_0^\infty xy\,e^{-2x}e^{-3y}\,dx\,dy^{3}$$
$$= 6\left[-\frac{xe^{-2x}}{2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-2x}}{2}\,dx\right]\left[-\frac{ye^{-3y}}{3}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-3y}}{3}\,dy\right]$$

orj. s. 10

$$= 6\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-2x}\Big|_0^\infty \left(-\frac{1}{9}\right)e^{-3y}\Big|_0^\infty = \frac{6}{4\cdot 9} = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = 0$$

b) $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ olduğundan X ve Y ilintisizdir.

orj. s. 12

? 3 $E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^\infty x\,f_{X|Y}(x|y)\,dx$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^\infty e^{-x/y}e^{-y}\,dx$$
$$= -y\,e^{-x/y}e^{-y}\Big|_0^\infty = -y\,e^{-y}(0-1) = y\,e^{-y}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y\,e^{-y}} = \frac{1}{y}e^{-x/y}$$

[3] Claude notu: integrandda 6 çarpanı eksik; muhtemelen $xy\,6e^{-2x}e^{-3y}$ olmalı.

orj. s. 13

$$E[X|Y=y] = \int_0^\infty \frac{x}{y} e^{-x/y}\,dx = \qquad \begin{pmatrix} x = u & dx = du \\ \frac{1}{y} e^{-x/y} dx = dv & -e^{-x/y} = v \end{pmatrix}$$

$$= -xe^{-x/y}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x/y}\,dx = -y\,e^{-x/y}\Big|_0^\infty = y$$

$$\boxed{E[X|Y=y] = y}$$