Sayısal Haberleşme

M-PSK ve MFSK hata olasılığı eğrileri

Orijinal not: Ders-13.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

Sayfa 222, Şekil 4.29 – M-PSK

Şekil: Basılı şekil (ders kitabı, Şekil 4.29): koheren algılanan M-PSK için bit hata olasılığı $P_B(M) - E_b/N_0$ (dB) eğrileri; $k = 1,2$ (tek eğri), 3, 4, 5; dijitalleştirilmedi. El yazısı eklemeler: $P_B = 10^{-4}$ düzeyinde y ekseninden $k = 1,2$ eğrisine kesikli yatay çizgi ve $E_b/N_0 \approx 8-9$ dB'de eksenden yukarı doğru çıkan (diğer eğrileri de kesen) düz düşey çizgi.
(orijinal notta, s. 1)

M arttıkça bit hata olasılığı artıyor
$M \uparrow \Rightarrow P_b \uparrow$ (performans kötüleşiyor)

× BG aynı (BGV↑) → BG verimli teknik

$$\text{BGV} = \frac{R_b \text{ bit/sn}}{\text{BG Hz}} \uparrow$$

BG verimi: M-QAM ✓, M-ASK ✓

QPSK BPSK'dan avantajlıdır
(2 bit) (1 bit) aynı hata olasılığı

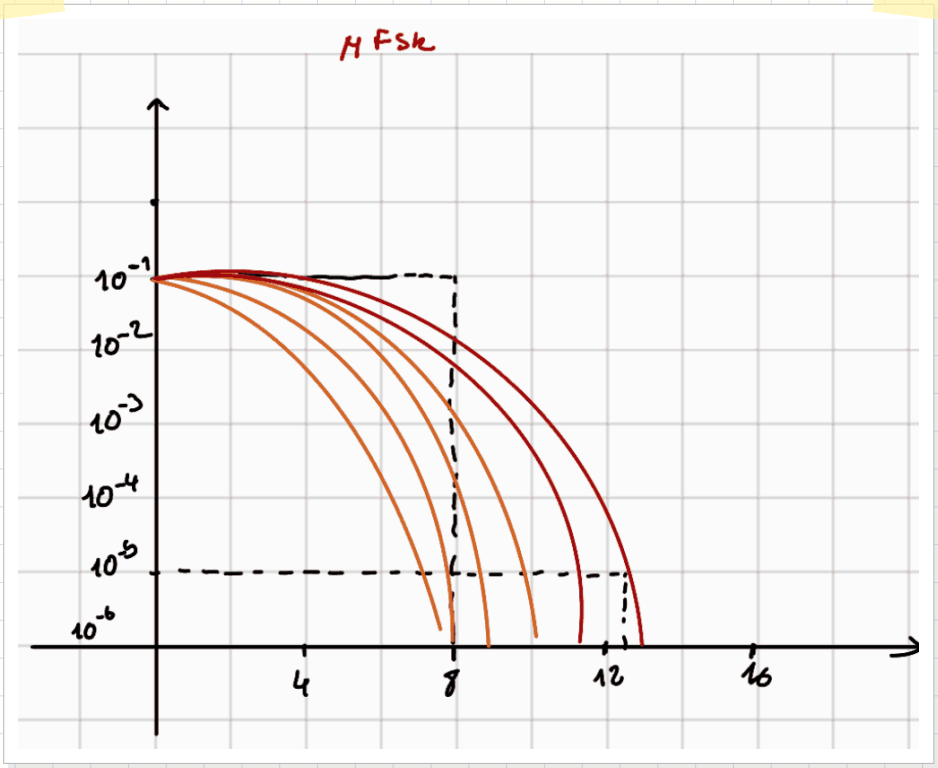
Sayfa 230, Şekil 4.35

Gray kodlama $\Rightarrow P_B \approx \frac{1}{k} P_E$

Şekil: Basılı şekil (ders kitabı, Şekil 4.35): koheren algılanan M-PSK için sembol hata olasılığı $P_E(M) - E_b/N_0$ (dB) eğrileri, $M = 2,4,8,16,32,64$ ($M = 2^k$); dijitalleştirilmedi.
(orijinal notta, s. 1)

Sayfa 221, Şekil 4.28 (MFSK) – MFSK

orj. s. 2



orijinal çizim, s. 2

$M \uparrow \Rightarrow P_b \downarrow \times$ BG $\uparrow$ (BGV $\downarrow$)
(performans iyileşir) (güç verimli)

Uydu haberleşmesinde kullanılıyor

Ortogonal modülasyon teknikleri için

$$P_b = \frac{M}{2(M-1)} P_s$$

MFSK Gücün önemli olduğu Bant genişliği önemsenmediği yerde MPSK'ya tercih edilir.

Performans ifadeleri

$$\left.\begin{matrix}\text{2-PSK (BPSK)} \\ \text{4-PSK (QPSK)}\end{matrix}\right\} P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

2-FSK (BFSK) Faz tahminli ?d. (Coherent ?edena):

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad \frac{1}{2T} \rightarrow \text{Bant genişliği bakımından daha avantajlı}$$

Faz tahminsiz (Non coherent):

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{2N_0}} \qquad \frac{1}{T}$$

$$Q(x) \le e^{-x^2/2}$$

MPSK

For large SNRs and $M > 8$

$$P_s \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \qquad E_s = k \cdot E_b$$

(E_s: sembol enerjisi, E_b: bit enerjisi)

$\Rightarrow$ Gray kodlama $\Rightarrow P_b \approx \frac{1}{k}P_s$

orj. s. 3

MFSK

Faz tahminli de geçerli

$$P_s \le (M-1)\,Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

$$P_b = \frac{M}{2(M-1)}P_s \Rightarrow P_b \le \frac{M}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \quad \leftarrow k \cdot E_b$$

Faz tahminsiz $P_s \le (M-1)\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{E_b}{N_0}}\right)$

Sayfa 240 Örn. 4.16

Yalnızca P_b dikkate alınırsa hangisini tercih edersiniz?

Coherent 8FSK, $\frac{E_b}{N_0} = 8$ dB

„ 8-PSK, $\frac{E_b}{N_0} = 13$ dB, gray coded $\rightarrow$ $\frac{E_b}{N_0} = 10^{1,3} = 19,952$

$$10\log_{10}\frac{E_b}{N_0} = 8 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 10^{0,8} = 6,309$$

$$\text{8FSK:}\quad P_b \le \frac{M}{2}Q\left(\sqrt{k\frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{8}{2}\underbrace{Q\left(\sqrt{3 \cdot 6,309}\right)}_{6,8\cdot10^{-6}}$$

$$= 27,2 \cdot 10^{-6} \approx 3 \cdot 10^{-5}$$

$M = 8 = 2^3 \Rightarrow k = 3$ bit/sembol

$$\text{8PSK:}\quad P_b = \frac{1}{k}P_s \rightarrow \frac{1}{3}\cdot 2\,Q\underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{2\tfrac{k}{3}\tfrac{E_b}{N_0}}}_{19{,}952}\underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{8}\right)}_{4{,}187}\right)}_{1{,}33\cdot 10^{-5}}$$

$$= 0{,}886\cdot 10^{-5} \approx 10^{-5}$$

8PSK'de hata daha az olduğundan tercih ederiz.

Örnek: S.238, Pr 4.7

BFSK, coherent detection, $P(s_1) = P(s_2) = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} s_1(t) &= 0{,}5\cos(2000\pi t) \rightarrow f_1 = 1000\text{ Hz} \\ s_2(t) &= 0{,}5\cos(2020\pi t) \rightarrow f_2 = 1010\text{ Hz} \end{aligned}\right\} f_2 - f_1 = 10\text{ Hz}$$

? ortogonallik şartı: $\Delta f = \frac{1}{2T} = 50$ Hz $\rightarrow$ ortogonal değil

AWGN, $\frac{N_0}{2} = 0{,}0001 \Rightarrow P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}(1-\rho)}\right)$

$T_b = 0{,}01$ s

$P_b = ?$

$$E_b = E_{s1}P(s_1) + E_{s2}P(s_2)$$

$$E_{s1} = E_{s2} = (0{,}5^2)\cdot\frac{1}{2}\cdot T = 0{,}00125 = 1{,}25\text{ mJ}$$

$$\Rightarrow E_b = 0{,}00125\text{ J}$$

$$\rho = \frac{1}{E_b}\int_0^T s_1(t)\,s_2(t)\,dt = \frac{1}{0{,}00125}\int_0^{0{,}01} 0{,}5\cos(2000\pi t)\;0{,}5\cos(2020\pi t)\,dt$$

$$= \frac{0{,}5^2}{0{,}00125}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{0{,}01}\left[\cos(20\pi t) + \cos(4020\pi t)\right]dt$$

orj. s. 4

$$\rho = 0{,}94 \Rightarrow P_b = Q\left(\underbrace{\sqrt{\frac{0{,}00125\,(1-0{,}94)}{2\cdot 0{,}0001}}}_{0{,}6123}\right) = 0{,}2743 \approx 0{,}3 = 3\cdot 10^{-1}$$

↑ 10 bitte 3 bit hata

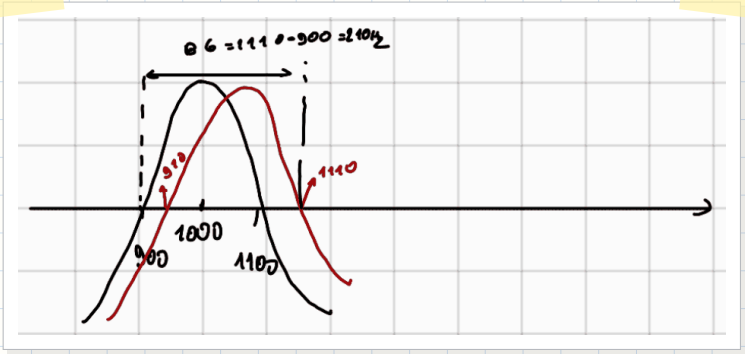
Ortogonal olsaydı

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{0{,}00125}{2\cdot 0{,}0001}}\right) = Q(2{,}5) = 0{,}0062 \approx 6\cdot 10^{-3}$$

Performansı 200 kat iyileştirdik

BG

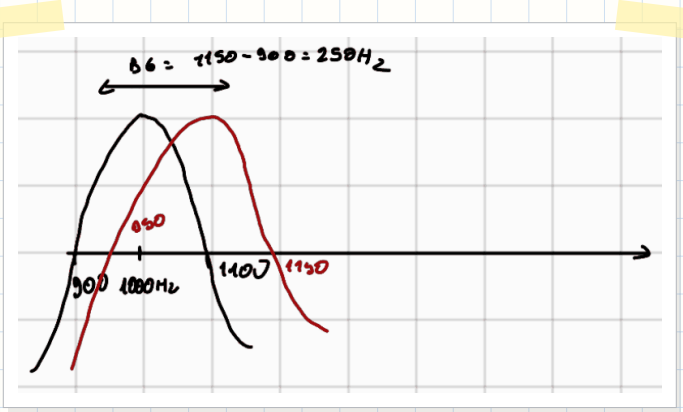
Ortogonal değilken $\frac{1}{T} = 100$



orijinal çizim, s. 4

Ortogonallik

$$\Delta f = \frac{1}{2T} = 50 \text{ Hz} \rightarrow \begin{matrix} f_1 = 1000 \text{ Hz} \\ f_2 = 1050 \text{ Hz} \end{matrix}$$



orijinal çizim, s. 4

Örnek: S.237, Pr. 4.8

Şekil: Basılı soru metni (ders kitabı, 4.8): korelatör alıcıda optimum eşik γ_{th} sorusu; dijitalleştirilmedi.
(orijinal notta, s. 4)

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t)$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(\omega_0 t + \pi)$$

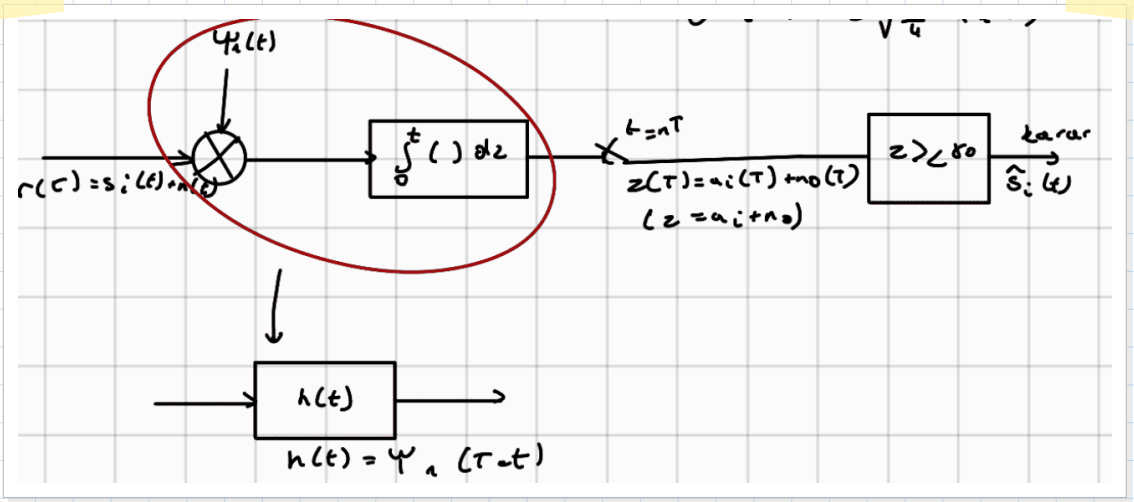
$$P(s_1) = P(s_2) \qquad \text{2-QAM gibi}$$

Ref signal $\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(\omega_0 t)$

$\gamma_0 = ?$

orj. s. 5

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(\omega_0 t), \quad 0 \le t \le T \rightarrow \begin{cases} s_1(t) = \sqrt{E}\,\psi_1(t) \\ s_2(t) = -\sqrt{\frac{E}{4}}\,\psi_1(t) \end{cases}$$



orijinal çizim, s. 5

$$a_i = \int_0^T s_i(t)\,\psi_1(t)\,dt \qquad i = 1,2$$

temel fonksiyonların enerjisi 1 olmak zorunda

$$a_1 = \int_0^T s_1(t)\cdot\psi_1(t)\,dt = \int_0^T \sqrt{E}\,\psi_1(t)\,\psi_1(t)\,dt = \sqrt{E}\underbrace{\int_0^T \psi_1^2(t)\,dt}_{E_{\psi_1}} = \sqrt{E}$$

$$a_2 = \int_0^T s_2(t)\,\psi_1(t)\,dt = -\sqrt{\frac{E}{4}}\int_0^T \psi_1^2(t)\,dt = -\frac{\sqrt{E}}{2}$$

$$\gamma_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E}/2}{2} = \frac{\sqrt{E}}{4}$$

$P_b = ?$

$$P_b = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}\right)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2}E_{\psi_1} \qquad \text{ve} \qquad E_{\psi_1} = 1$$

$$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2}$$

$$P_b = Q\left(\frac{\sqrt{E} + \sqrt{E}/2}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{9}{8}\frac{E}{N_0}}\right)$$

E_b cinsinden ifade edelim

$$E_b = E_{s1}P(s_1) + E_{s2}P(s_2)$$
$$= E\cdot\frac{1}{2} + \frac{E}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5E}{8} \Rightarrow E = \frac{8E_b}{5}$$
$$\rightarrow P_b = Q\left(\sqrt{\frac{9}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

II. yol

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}(1-\rho)}\right) \xrightarrow[\text{siz hesaplayın}]{\rho=-4/5} P_b = Q\left(\sqrt{\frac{9}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

III. yol

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{N_0}}\right) \qquad E_d = \int_0^T [s_1(t)-s_2(t)]^2 dt = \frac{9}{4}E$$

$$\Rightarrow P_b = Q\left(\sqrt{\frac{9}{4}\frac{E}{N_0}}\right)^1$$

[1] Claude notu: satırın alt kısmı sayfa kenarında kesik; ifade tahminidir.