Sayısal İşaret İşleme

Ayrık zamanlı sistemler, LTI, konvolüsyon, FIR/IIR

Orijinal not: Dsp-ders-2.pdf

UYARI Bu belge, el yazısı ders notlarından Claude (Anthropic) yardımıyla dijitale aktarılmıştır. Yardımcı kaynak olarak hazırlanmıştır; hata veya eksik içerebilir. Lütfen orijinal notları ve ders kaynaklarını esas alın.

NOTICE *This document was transcribed from handwritten lecture notes with the help of Claude (Anthropic). It is meant as a supplementary resource and may contain errors or omissions. Always check against the original notes and official course material.*

orj. s. 1

$$x(t) = \cos(2\pi t)$$

$F_s = 5\,\text{Hz}$ olsun

$$x[n] = x(t)\Big|_{t=nT_s} = \cos\frac{2\pi n}{5} = \cos 0{,}4\pi n$$

$$\omega = 0{,}4\pi$$

$$2\pi k = 0{,}4\pi N$$

$N = 5k$ $\quad N_0 = 5$ periyottur.

$x_1[n] = \cos(0{,}4\pi n)$ ← bu işaretin frekansı daha yüksek

$x_2[n] = \cos(0{,}2\pi n)$

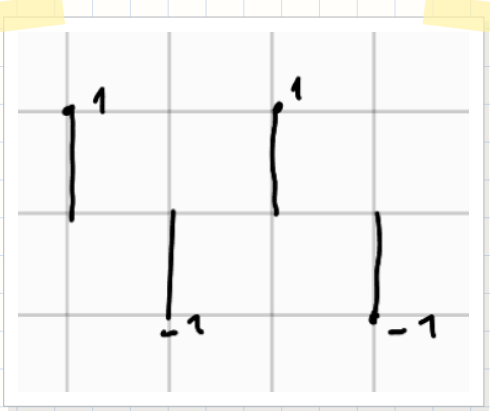
Dikkat!

Daha sık örnekleme aynı işaret için ayrık zamanlı işaretin frekansını azaltır

Ayrık zamanda daha yüksek değişimler daha yüksek frekans demektir, az değişler daha az frekans demektir.

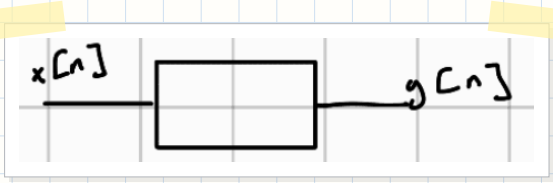
Ayrık zamanda en yüksek frekans $\omega = \pi$'dir

$$x[n] = \cos \pi n$$



orijinal çizim, s. 1

Systems



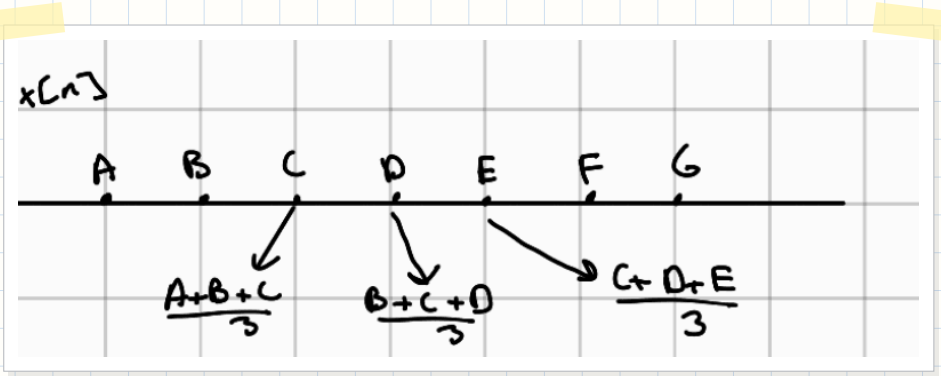
orijinal çizim, s. 1

$$y[n] = x[n - n_d] \qquad \leftarrow \text{gecikme}$$

bellekli ↙

$$y[n] = \frac{1}{3}x[n] + \frac{1}{3}x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-2]$$

ortalama alıyor, hareketli (moving average) (son üç örneklemin ortalaması alıyor)



orijinal çizim, s. 1

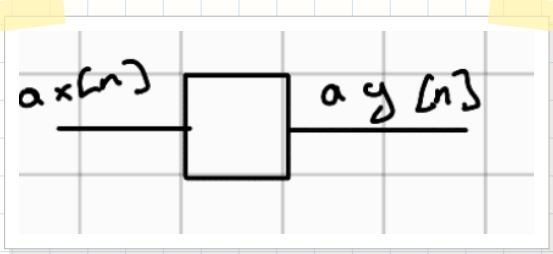
(Alçak geçiren filtre aslında ayrık zamanda)

orj. s. 2

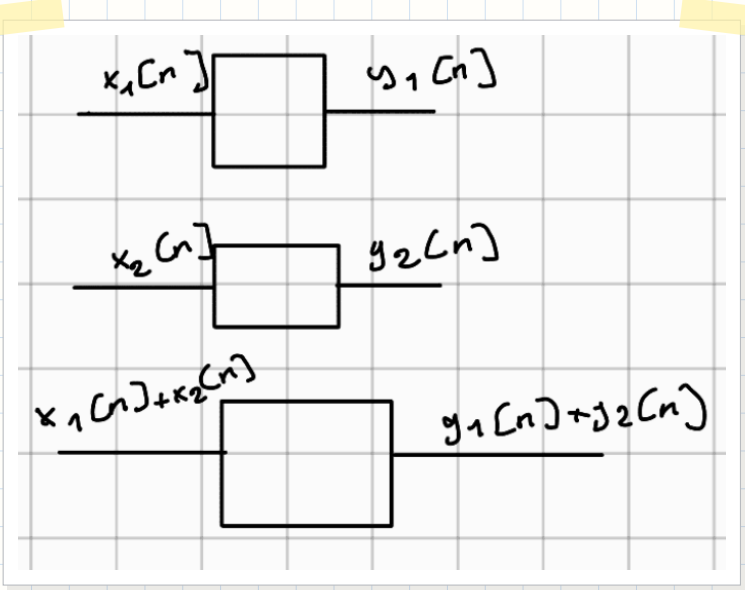
$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] \qquad \text{belleksiz}$$

Linear system

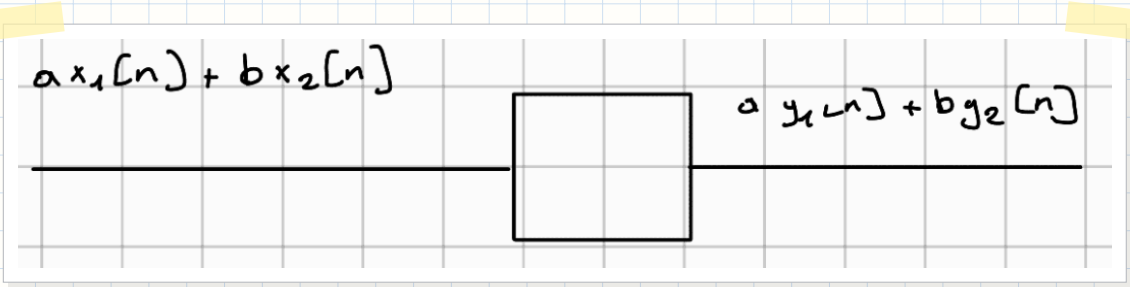
linear system



orijinal çizim, s. 2



orijinal çizim, s. 2



orijinal çizim, s. 2

$$y[n] = 8x[n] + 1$$

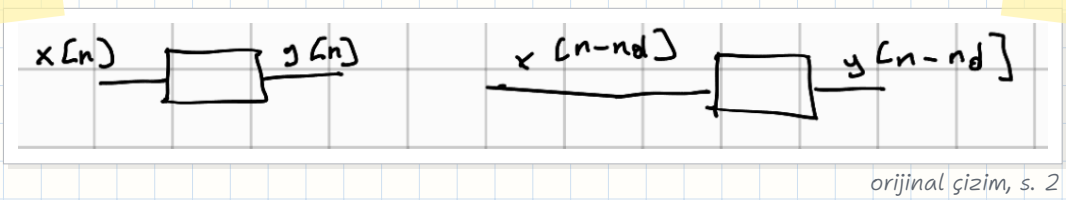
linear systeme 0 verince 0 çıkmalıdır

$x_1[n] = 2$ $\quad y_1[n] = 17$
$x_2[n] = 3$ $\quad y_2[n] = 25$
$x_3[n] = 5$ $\quad y_3[n] = 41 \neq 42$

Time invariant Systems

$x_1[n] \rightarrow y_1[n]$ time invariant ise

$x_1[n - n_d] \rightarrow y_1[n - n_d]$



orijinal çizim, s. 2

orj. s. 3

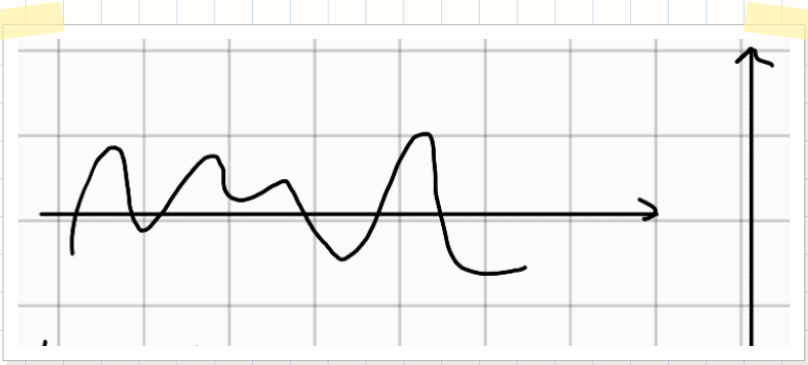
Nedensel sistemler

çıkışı şimdiki ve önceki örnekleme bağlı

zamansa nedensel olmayan sistemler gerçekleştirilemez
Ama konumsa gerçekleşebilir!!

non-causal – $y[n] = x[n-1] + x[n] + x[n+1]$
anti causal – $y[n] = x[n+1]$ sadece geleceğe bağlı

Kararlılık (BI-BO)



orijinal çizim, s. 3

$$|x[n]| < B_x \leq \infty$$
$$|y[n]| < B_y \leq \infty$$

Bir sistemin kararlı olduğunu nasıl anlarız
kararlı olduğunu göstermek çok zor

$$y[n] = (x[n])^3$$

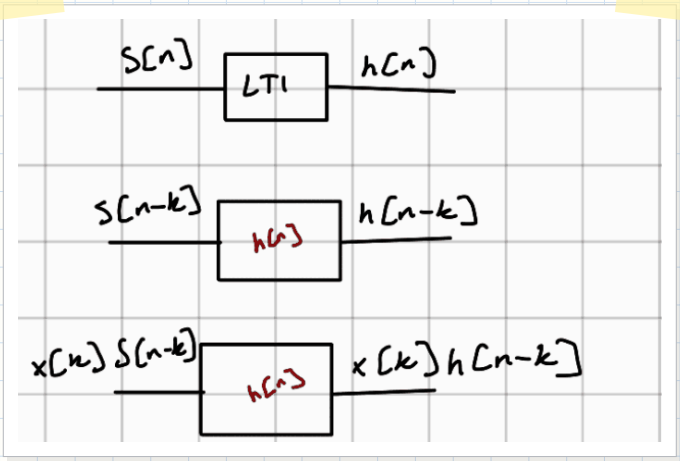
$|x[n]| < B_x$
$|y[n]| < (B_x)^3$ → hala sonlu

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n+1, & n \geq 0 \end{cases}$$

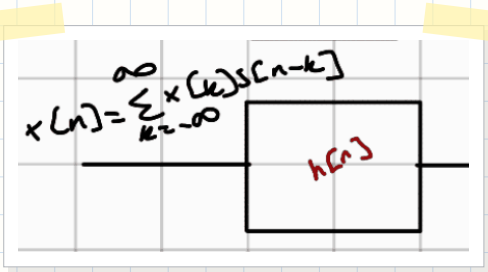
↑ n sonsuza giderken sistem kararsızdır.

orj. s. 4

LTI Systems



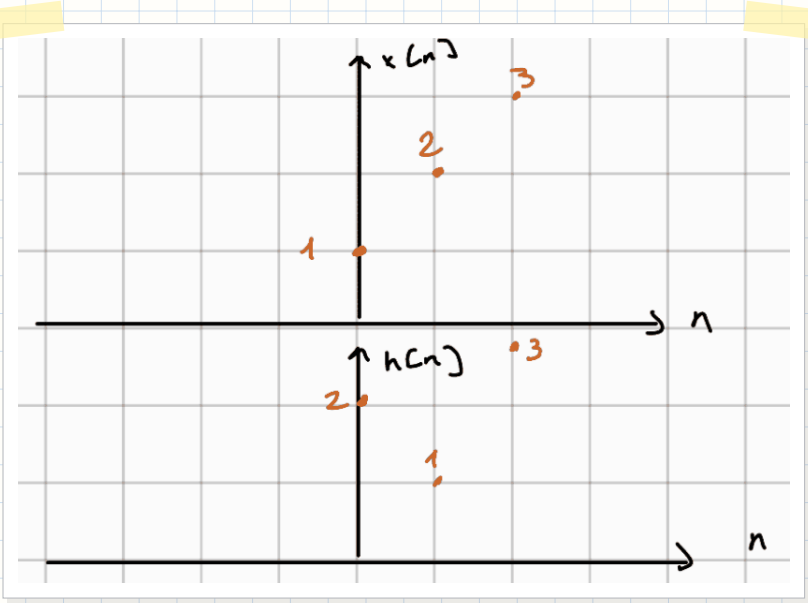
orijinal çizim, s. 4



orijinal çizim, s. 4

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] = x[n] * h[n]$$

convolution sum

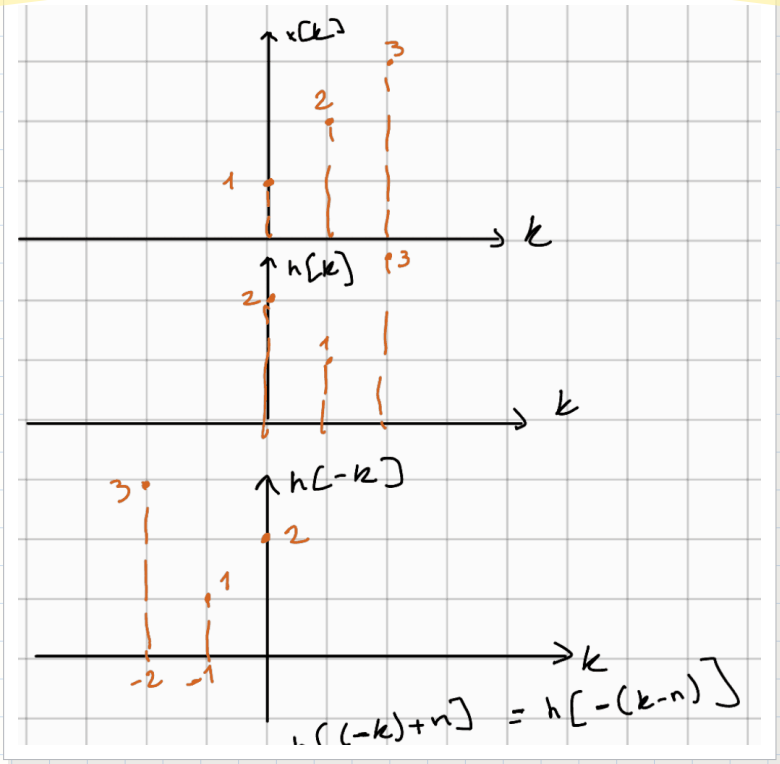


orijinal çizim, s. 4

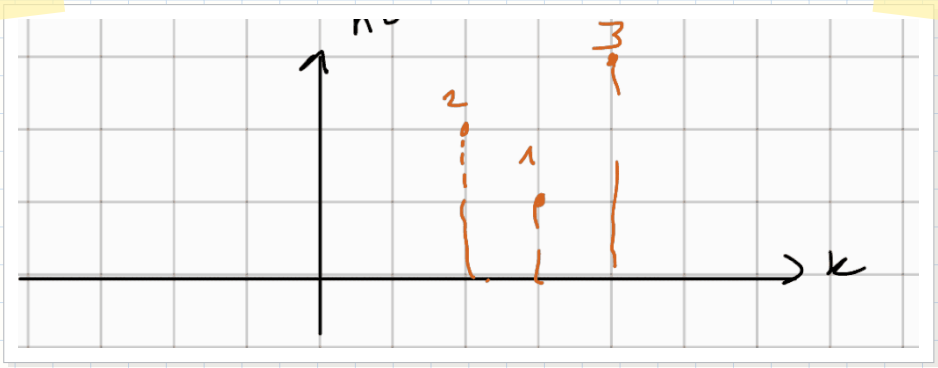
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$$

$$x[n] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$h[n] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

orj. s. 5

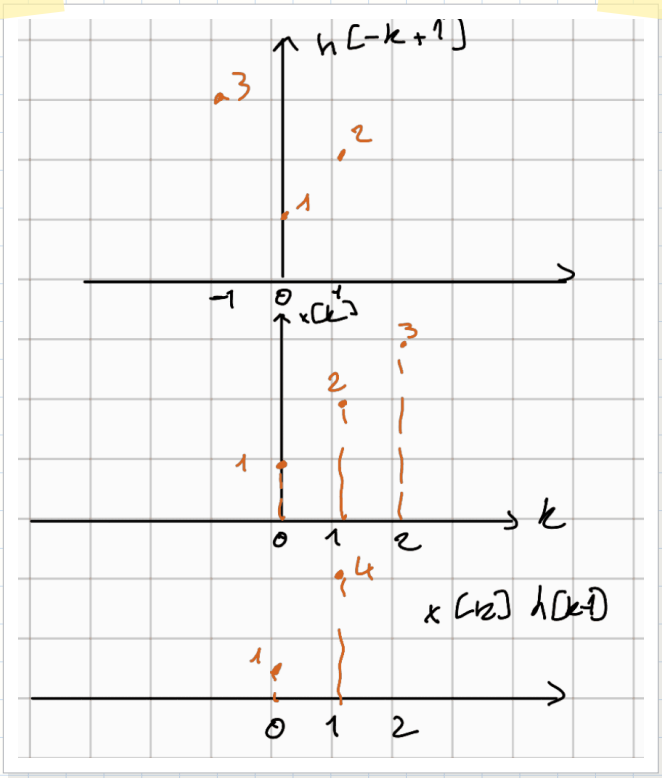


orijinal çizim, s. 5



orijinal çizim, s. 5

$$y[0] = 2 \cdot 1 = 2$$



orijinal çizim, s. 5

$$y[1] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

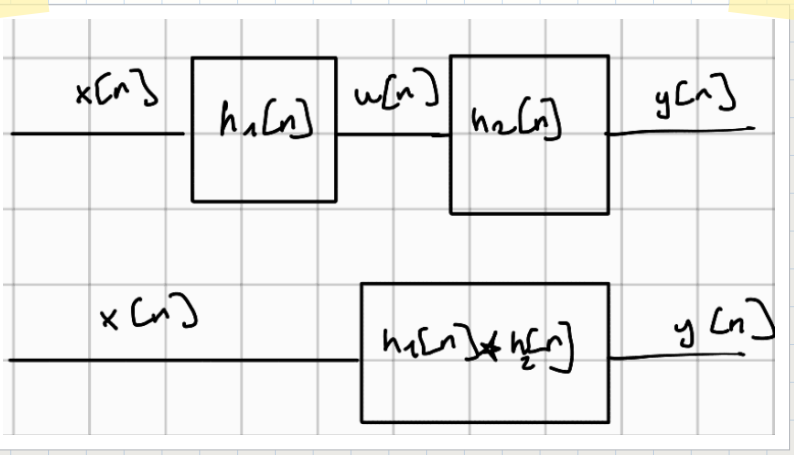
$k = 0 \quad 1$

x boyutu 3 $= A$

orj. s. 6

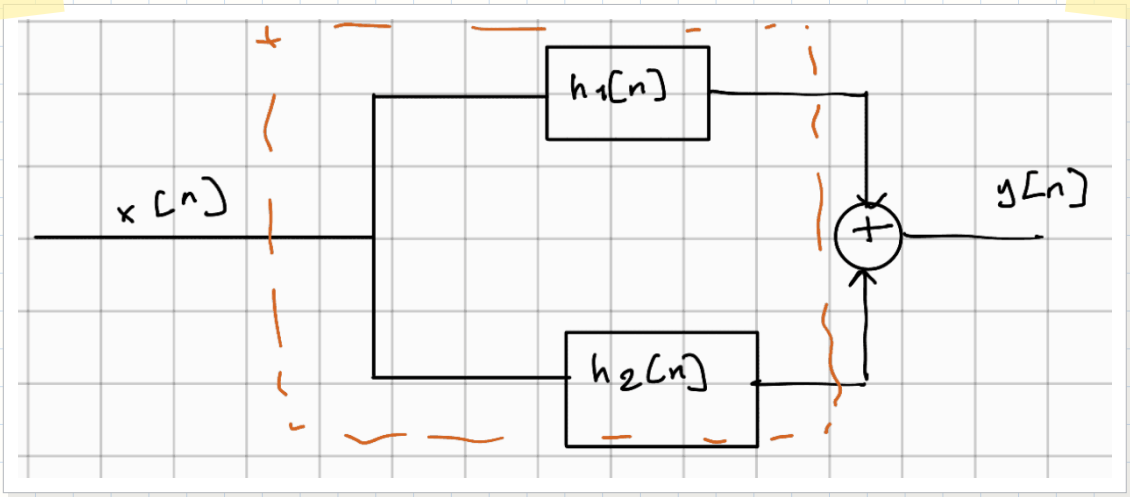
h boyutu 3 $= B$

y boyutu 5 $= A + B - 1$

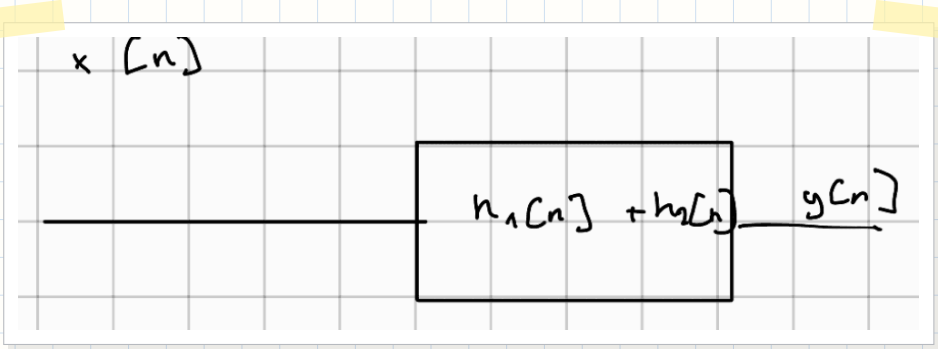


orijinal çizim, s. 6

$$
\begin{aligned}
w[n] &= x[n] * h_1[n] \\
y[n] &= w[n] * h_2[n] \\
&= (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \\
&= x[n] * (h_1[n] * h_2[n])
\end{aligned}
$$



orijinal çizim, s. 6



orijinal çizim, s. 6

$h[n]$ $\quad y[n] = x[n] * h[n]$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y[n] = \cdots &+ h[-2]\,x[n-2] + h[-1]\,x[n-1]^{1} \\
&+ h[0]\,x[n] + h[1]\,x[n-1] + h[2]\,x[n-2] + \cdots
\end{aligned}
$$

orj. s. 7

Nedensel sistemlerde çıkış gelecekteki girişlerden bağımsız

[1] Claude notu: muhtemelen $x[n+2]$ ve $x[n+1]$ olmalı.

$$h[-1] = 0$$
$$h[-2] = 0$$
$$\vdots$$
$$h[-n] = 0$$
$$h[n] = 0 \quad n < 0$$

$\Rightarrow$ sistem nedenseldir.

Kararlılık = Genliği sınırlı bir giriş için çıkışı sınırlı olan sistem

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \qquad \text{(mutlak toplanabilir)}$$

> ⚠ **Dikkat!**
> Sakın sınavda mutlak koymayı unutma 0 alırsın :)

$h[n] = u[n]$ kararsız

$h[n] = \alpha^n u[n]$

geometrik seri toplamı

toplam: $\frac{1}{1-|\alpha|}$ $\quad |\alpha| < 1$ ← önemli

$|\alpha| \geq 1$ ise kararsızdır sistem

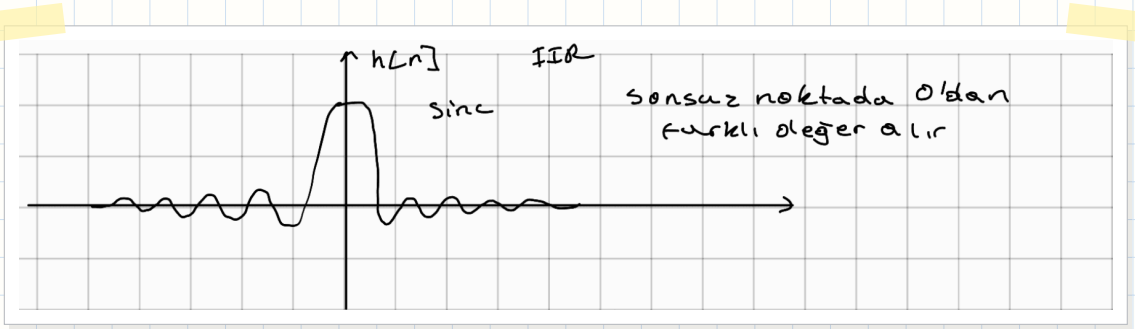
$h[n] = 0{,}2^n u[n]$ $\quad$ toplam $\frac{1}{1-|\alpha|} = \frac{1}{1-0{,}2} = 1{,}25$

$= 1 + 0{,}2 + 0{,}04 + \cdots$

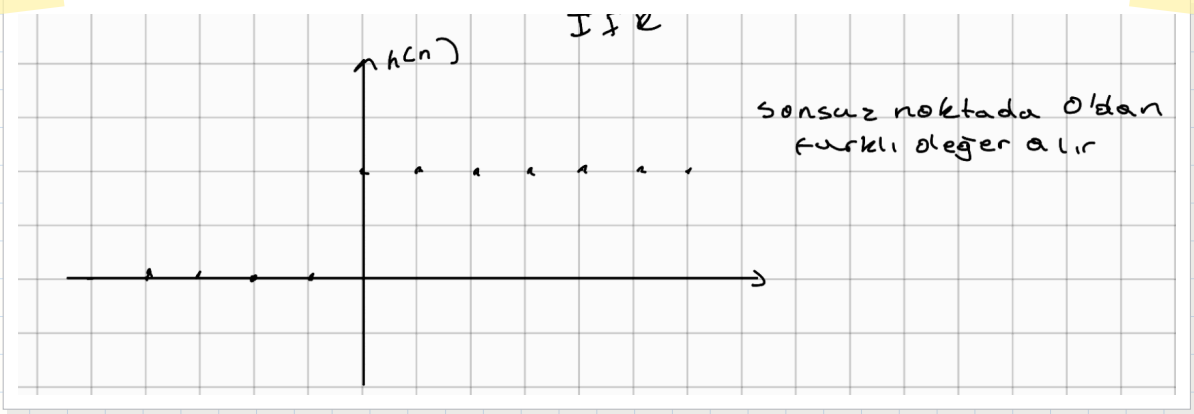
FIR ve IIR

Finite Impulse Response
Infinite Impulse Response

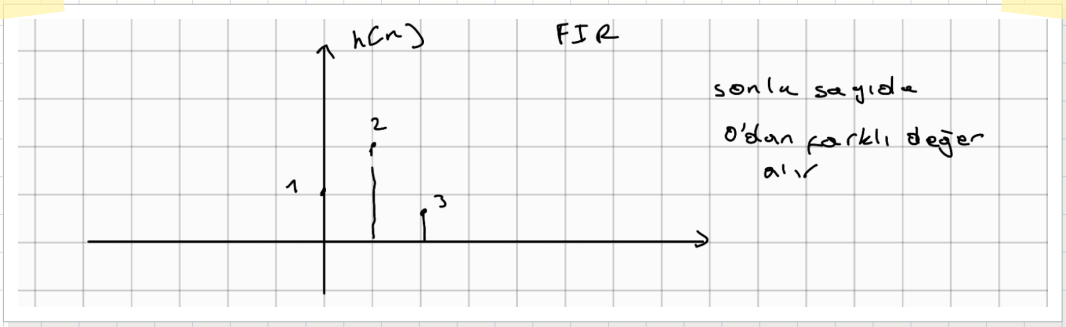
orj. s. 8



orijinal çizim, s. 8



orijinal çizim, s. 8



orijinal çizim, s. 8

h[n]'in genliği her zaman sonludur

FIR her zaman kararlı

IIR (her zaman) kararlı değil ama kullanırız çünkü daha az pencere (örnek) ile FIR'ın yaptığı iş yapılabilir (bazı işaretler için)